三重大学

2014年 第2問

$\boxed{2}$ 以下の問いに答えよ．ただし，Eは単位行列である．

(1) 行列 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ に対して $|A|=ad-bc$ とおく．たとえば，$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ のときは，$|A|=1\times4-2\times3=-2$ である．$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ と $B=\begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$ に対して $|AB|=|A|\times|B|$ が成り立つことを示せ．

(2) 実数x，yに対して，行列X，Y，Zを

$$X=\begin{pmatrix} x^2 & x^2 \\ y^2-1 & y^2 \end{pmatrix},\quad Y=X-xE,\quad Z=X-yE$$

で定める．積YZが逆行列をもたないような$(x,\ y)$を，xy平面上で図示せよ．

(1) $AB=\begin{pmatrix} ap+br & aq+bs \\ cp+dr & cq+ds \end{pmatrix}$ より，$|AB|=(ap+br)(cq+ds)-(aq+bs)(cp+dr)$

$\therefore |AB|=(ad-bc)(ps-qr)=|A|\times|B|$ ■

(2) YZが逆行列をもたない $\Longleftrightarrow$ $|YZ|=0$

(1)より $\Longleftrightarrow$ $|Y|=0$ または $|Z|=0$

ここで $Y=\begin{pmatrix} x^2-x & x^2 \\ y^2-1 & y^2-x \end{pmatrix}$，$Z=\begin{pmatrix} x^2-y & x^2 \\ y^2-1 & y^2-y \end{pmatrix}$ なので

$|Y|=(x^2-x)(y^2-x)-x^2(y^2-1)=0$ または $|Z|=(x^2-y)(y^2-y)-x^2(y^2-1)=0$

$\therefore x(x^2-2x+y^2)=0$ または．$(y-1)(x^2+y^2)=0$

$\therefore x=0$ または $y=1$ または $x=y=0$ または $(x-1)^2+y^2=1$

よって右図の

直線 y軸，$y=1$，円 $(x-1)^2+y^2=1$ の上の点