

2012年工・情報・環境学部(A)第8問



8 表の出る確率が $\frac{1}{3}$, 裏の出る確率が $\frac{2}{3}$ の王冠がある. この王冠をくり返し n 回投げるとき, 多くとも 1 回だけ裏の出る確率を $p(n)$ とする.

- (1) $p(n)$ を求めよ.
 (2) $p(n+1) < p(n)$ を示せ.
 (3) $p(n) \leq 0.2$ となるような n の最小値を求めよ.

(1) 裏が出ないのは, $(\frac{1}{3})^n$, 裏が 1 回だけ出るのは, $(\frac{1}{3})^{n-1} \cdot (\frac{2}{3}) \cdot nC_1$

$$\begin{aligned} \therefore p(n) &= \left(\frac{1}{3}\right)^n + 2n \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n \\ &= \underline{\underline{(2n+1) \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \quad p(n) - p(n+1) &= (2n+1) \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n - (2n+3) \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} \\ &= \frac{2n+1}{3^n} - \frac{2n+3}{3^{n+1}} \\ &= \frac{4n}{3^{n+1}} \\ &> 0 \end{aligned}$$

よって, $p(n+1) < p(n)$ \square

$$(3) (1) \text{より}, \quad p(1) = 1, \quad p(2) = \frac{5}{9}, \quad p(3) = \frac{7}{27}, \quad p(4) = \frac{9}{81} = \frac{1}{9}$$

> 0.2 ≤ 0.2

よって, $\underline{\underline{n=4}}$