



2015年 第3問

3 正の整数 n について、 $\sqrt{2n-1}$ 以下の最大の整数を a_n と定める。このとき、以下の問いに答えよ。

- (1) a_{100} の値を求めよ。また、 $a_n = a_{100}$ となる n はいくつあるか求めよ。
 (2) 正の整数 m に対して、 $a_n = m$ となる n はいくつあるか求めよ。
 (3) 数列 $\{a_n\}$ の初項から第 100 項までの和を求めよ。
 (4) $T_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{a_k}$ とする。 T_{12} の値を求めよ。また、 $T_n > 10$ をみたす最小の n を求めよ。

$$\begin{aligned} (2) a_n = m &\Leftrightarrow m \leq \sqrt{2n-1} < m+1 \\ &\Leftrightarrow m^2 \leq 2n-1 < m^2+2m+1 \\ &\Leftrightarrow \frac{m^2+1}{2} \leq n < \frac{m^2}{2} + m + 1 \quad \cdots (*) \end{aligned}$$

(i) m : 偶数のとき、 $m = 2m'$ (m' : 正の整数) とおくと、

$$(*) \Leftrightarrow 2m'^2+1 \leq n < 2m'^2+2m'+1$$

\therefore これをみたす n は、 $2m'^2+2m'+1 - (2m'^2+1) = m$ 個

(ii) m : 奇数のとき、 $m = 2m'-1$ (m' : 正の整数) とおくと、

$$(*) \Leftrightarrow 2m'^2-2m'+1 \leq n \leq 2m'^2-2m'+m+1$$

\therefore これをみたす n は、 $2m'^2-2m'+m+1 - (2m'^2-2m'+1) + 1 = m+1$ 個

(i), (ii) より、 m が偶数のとき m 個、 m が奇数のとき $m+1$ 個。

(3) $a_1 \leq a_2 \leq \cdots$ であり、 $a_{98} = 13$, $a_{99} = 14$, $a_{100} = 14$ より、(1) を使って

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{100} a_k &= 1 \cdot 2 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 4 + 4 \cdot 4 + \cdots + 13 \cdot 14 + 14 \cdot 2 \\ &= \left(\sum_{k=1}^{13} k^2 \right) + (1+3+5+\cdots+13) + 28 \\ &= \underline{896} \end{aligned}$$

$$(4) T_{12} = 1 \cdot 2 + \frac{1}{2} \cdot 2 + \frac{1}{3} \cdot 4 + \frac{1}{4} \cdot 4 = \underline{\frac{16}{3}}$$

$$T_{42} = 1 \cdot 2 + \frac{1}{2} \cdot 2 + \frac{1}{3} \cdot 4 + \frac{1}{4} \cdot 4 + \frac{1}{5} \cdot 6 + \frac{1}{6} \cdot 6 + \frac{1}{7} \cdot 8 + \frac{1}{8} \cdot 8 + \frac{1}{9} \cdot 2 = 9 + \frac{283}{315} < 10$$

$$T_{43} = T_{42} + \frac{1}{9} = 9 + \frac{318}{315} > 10 \quad \therefore \underline{n=43}$$

$$(1) 14 = \sqrt{196} < \sqrt{199} < \sqrt{225} = 15$$

$$\therefore \underline{a_{100} = 14}$$

$$a_n = 14 \Leftrightarrow 14 \leq \sqrt{2n-1} < 15$$

$$\Leftrightarrow 196 \leq 2n-1 < 225$$

$$\Leftrightarrow \frac{197}{2} \leq n < 113$$

$$\therefore n = 99, 100, \dots, 112$$

の 14個