2014年 政治経済学部 第4問

数理 石井K

$\boxed{4}$ x, y を自然数，p を3以上の素数とするとき，次の各問に答えよ．ただし，(1), (3) は答のみ解答欄に記入せよ．

(1) $x^2 - y^2 = p$ が成り立つとき，x, y を p で表せ．

(2) $x^3 - y^3 = p$ が成り立つとき，p を6で割った余りが1となることを証明せよ．

(3) $x^3 - y^3 = p$ が自然数の解の組 (x, y) をもつような p を，小さい数から順に p_1, p_2, p_3, … とするとき，p_5 の値を求めよ．

(1) $(x-y)(x+y) = p$

$x+y \geqq 2$ で p は素数より，$x-y=1$ …①

このとき，$x+y=p$ …②

①,②より，$x = \frac{p+1}{2}$, $y = \frac{p-1}{2}$ 〃

(2) $(x-y)(x^2+xy+y^2) = p$

$x^2+xy+y^2 \geqq 3$ で，p は素数より，$x-y=1$ …③

このとき，$x^2+xy+y^2 = p$ …④

③,④より，x を消去して，

$p = (y+1)^2 + (y+1)y + y^2$

$= 3y^2 + 3y + 1$

$= 3y(y+1) + 1$

ここで，$y(y+1)$ は連続する自然数の積なので偶数 ∴ $y(y+1) = 2n$ (n:自然数)

とおける．

∴ $p = 6n+1$ となり，p を6で割った余りは1となる ▨

(3) (2)より，$p = 3y(y+1)+1$ これに $y = 1, 2, 3, \cdots$ を代入していく

$y=1$ のとき，$p=7$ (素数) ∴ $p_1 = 7$

$y=2$ 〃 $p=19$ (素数) ∴ $p_2 = 19$

$y=3$ 〃 $p=37$ (素数) ∴ $p_3 = 37$

$y=4$ 〃 $p=61$ (素数) ∴ $p_4 = 61$

$y=5$ 〃 $p=91$ $(=13\times7)$ ∴ 不適

$y=6$ 〃 $p=127$ (素数) ∴ $p_5 = 127$ 〃