東京海洋大学

2014年 海洋工 第3問

数理 石井K

3 座標平面上の曲線 $C : y = x^3 - x$ を考える．C 上の点 $(-a,\ -a^3+a)$ と $(a,\ a^3-a)$ $(a>0)$ における C の接線をそれぞれ ℓ_1，ℓ_2 とする．また，ℓ_1 と C との $(-a,\ -a^3+a)$ 以外の共有点を P_1，ℓ_2 と C との $(a,\ a^3-a)$ 以外の共有点を P_2 とする．さらに，P_2 を通り y 軸に平行な直線と ℓ_1 の交点を Q_1，P_1 を通り y 軸に平行な直線と ℓ_2 の交点を Q_2 とする．

(1) P_1，P_2，Q_1，Q_2 の座標を求めよ．

(2) 2点 P_1，P_2 を通る直線と C で囲まれる2つの図形の面積の和を S_1，四角形 $P_1Q_1P_2Q_2$ の面積を S_2 とする．$\dfrac{S_1}{S_2}$ を求めよ．ただし，$\displaystyle\int x^3\,dx = \frac{x^4}{4} + D$（$D$ は積分定数）を用いてよい．

(1) $y' = 3x^2 - 1$ より，ℓ_1: $y = (3a^2-1)(x+a) - a^3 + a$ $\therefore \ell_1 : y = (3a^2-1)x + 2a^3$

同様に，ℓ_2: $y = (3a^2-1)(x-a) + a^3 - a$ $\therefore \ell_2 : y = (3a^2-1)x - 2a^3$

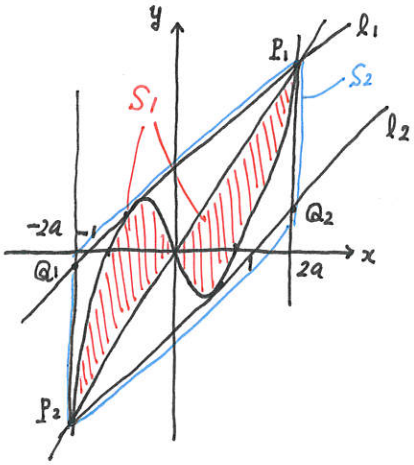
$x^3 - x - (3a^2-1)x - 2a^3 = 0$ において 解と係数の関係より，P_1 の x 座標は $2a$，

$x^3 - x - (3a^2-1)x + 2a^3 = 0$ において 同様にして，P_2 の x 座標は $-2a$

$\therefore$ $P_1(2a,\ 8a^3-2a)$，$P_2(-2a,\ -8a^3+2a)$ //

P_2 を通り y 軸に平行な直線 $x=-2a$ と ℓ_1 の交点は，$Q_1(-2a,\ -4a^3+2a)$ //

同様にして，$Q_2(2a,\ 4a^3-2a)$ //



(2) 図形は原点に関して対称であるから．

直線 P_1P_2 : $y = (4a^2-1)x$

$\therefore S_1 = 2\displaystyle\int_0^{2a} (4a^2-1)x - x^3 + x\,dx$

$= 2\left[\, 2a^2x^2 - \dfrac{x^4}{4} \,\right]_0^{2a}$

$= 8a^4$

$S_2 = (8a^3 - 2a - 4a^3 + 2a) \times 4a = 16a^4$

（$\because P_1Q_1P_2Q_2$: 平行四辺形）

$\therefore \dfrac{S_1}{S_2} = \dfrac{8a^4}{16a^4} = \dfrac{1}{2}$ //