東京農工大学

2015年 第4問　　1枚目／2枚

数理 石井K

$\boxed{4}$ $f(x) = \cos x + \sin x - 1$ とする．$g(x)$ は

$$g(x) = |f(x)| - \frac{1}{4\pi^2}\left\{\int_0^{2\pi} tg(t)\,dt - 3\pi\right\}$$

を満たす連続関数とする．次の問いに答えよ．

(1) 区間 $0 \leqq x \leqq 2\pi$ において $f(x) > 0$ を満たす x の範囲を求めよ．

(2) 不定積分 $\int xf(x)\,dx$ を求めよ．

(3) 定積分 $\int_0^{2\pi} t|f(t)|\,dt$ の値を求めよ．

(4) $g(x)$ を求めよ．

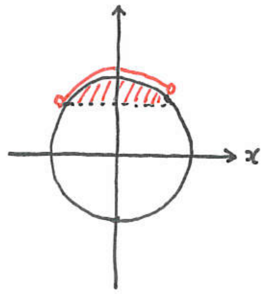
(1) $f(x) = \sqrt{2}\left(\sin x \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + \cos x \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}\right) - 1$

$= \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) - 1$

$\therefore$ $f(x) > 0$ より．$\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) > \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\frac{\pi}{4} \leqq x + \frac{\pi}{4} \leqq \frac{9}{4}\pi$ より．$\frac{\pi}{4} < x + \frac{\pi}{4} < \frac{3}{4}\pi$

$\therefore$ $\underline{0 < x < \frac{\pi}{2}}$ //



(2) (与式) $= \int (\sin x - \cos x - x)' \cdot x\,dx$

$= x\sin x - x\cos x - x^2 - \int \sin x - \cos x - x\,dx$

$= x\sin x - x\cos x - x^2 - \left(-\cos x - \sin x - \frac{1}{2}x^2\right) + C$

$= \underline{(1+x)\sin x + (1-x)\cos x - \frac{1}{2}x^2 + C}$ （C：積分定数） //

(別) $\sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) - \sqrt{2}x\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) - \frac{1}{2}x^2 + C$ でも良い

(3) (1)より．

(与式) $= \int_0^{\frac{\pi}{2}} tf(t)\,dt + \int_{\frac{\pi}{2}}^{2\pi} t \cdot \{-f(t)\}\,dt$

$= \left[(1+t)\sin t + (1-t)\cos t - \frac{1}{2}t^2\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \left[(1+t)\sin t + (1-t)\cos t - \frac{1}{2}t^2\right]_{\frac{\pi}{2}}^{2\pi}$

$= 1 + \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi^2}{4} - 1 - \left(1 - 2\pi - \frac{1}{2}\cdot 4\pi^2 - \left(1 + \frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi^2}{4}\right)$

$= \underline{\frac{7}{4}\pi^2 + 3\pi}$ //

2015年 第4問　　2枚目／2枚

数理 石井K

$\boxed{4}$ $f(x)=\cos x+\sin x-1$ とする．$g(x)$ は

$$g(x)=|f(x)|-\frac{1}{4\pi^2}\left\{\int_0^{2\pi}tg(t)\,dt-3\pi\right\}$$

を満たす連続関数とする．次の問いに答えよ．

(1) 区間 $0\leqq x\leqq 2\pi$ において $f(x)>0$ を満たす x の範囲を求めよ．
(2) 不定積分 $\int xf(x)\,dx$ を求めよ．
(3) 定積分 $\int_0^{2\pi}t|f(t)|\,dt$ の値を求めよ．
(4) $g(x)$ を求めよ．

(4) $a=\int_0^{2\pi}tg(t)\,dt$ （定数）とおくと，

$$g(x)=|f(x)|-\frac{1}{4\pi^2}(a-3\pi)\quad\cdots(*)$$

$$\therefore\ a=\int_0^{2\pi}t\left\{|f(t)|-\frac{1}{4\pi^2}(a-3\pi)\right\}dt$$

$$=\int_0^{2\pi}t|f(t)|\,dt-\frac{1}{4\pi^2}\cdot(a-3\pi)\int_0^{2\pi}t\,dt$$

(3)より

$$=\frac{7}{4}\pi^2+3\pi-\frac{1}{4\pi^2}\cdot(a-3\pi)\cdot\left[\frac{t^2}{2}\right]_0^{2\pi}$$

$$=\frac{7}{4}\pi^2+3\pi-\frac{1}{2}a+\frac{3}{2}\pi$$

$$=\frac{7}{4}\pi^2+\frac{9}{2}\pi-\frac{a}{2}$$

$\therefore\ a=\frac{7}{6}\pi^2+3\pi$　(＊)に代入すると，

$$\therefore\ g(x)=|\cos x+\sin x-1|-\frac{1}{4\pi^2}\cdot\frac{7}{6}\pi^2$$

$$=\underline{|\cos x+\sin x-1|-\frac{7}{24}}$$ //