0001853456418999

室蘭工業大学

2014年 工学部 第2問

$\boxed{2}$ aを定数とし，eを自然対数の底とする．曲線 $y = xe^{-x^2}$ および直線 $y = ax$ をそれぞれ C，L とする．C と L は原点 $(0,\ 0)$ 以外に交点をもつ．

(1) aの値の範囲を求めよ．また，CとLの交点でそのx座標が正であるものをaを用いて表せ．

(2) $x \geqq 0$ においてCとLで囲まれた部分の面積を$S(a)$とするとき，$S(a)$を求めよ．

(3) $S(a) < \dfrac{1}{2}$ であることを示せ．

(1) $xe^{-x^2} - ax = 0$

$x(e^{-x^2} - a) = 0$

ここで $f(x) = e^{-x^2}$ とおくと．$f'(x) = -2xe^{-x^2}$

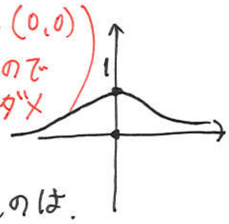
x	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\nearrow$	0	$\searrow$

$\therefore$ $f'(x) = 0$ となるのは．$x = 0$ のとき．

$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = 0$

$\therefore$ a の範囲は右グラフより

交点は(0,0)以外なので $a=1$はダメ



$0 < a \cancel{\leqq} < 1$ //

このときの交点で x座標が正のものは．

$e^{-x^2} = a$ より $-x^2 = \log a$ $\therefore$ $x = \pm\sqrt{-\log a}$ $\therefore$ $(\sqrt{-\log a},\ a\sqrt{-\log a})$ //

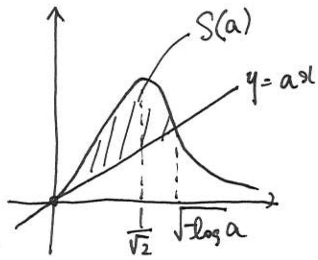
(2) $g(x) = xe^{-x^2}$ とおくと．

$g'(x) = e^{-x^2} + x(-2xe^{-x^2})$

$= (1-2x^2)e^{-x^2}$

$\therefore g'(x) = 0$ となるのは $x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$

x	$\cdots$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\cdots$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\cdots$
$g'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$g(x)$	$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$



$S(a) = \int_0^{\sqrt{-\log a}} xe^{-x^2} - ax\,dx$

$= -\frac{1}{2}\int_0^{\sqrt{-\log a}} (e^{-x^2})'dx - \int_0^{\sqrt{-\log a}} ax\,dx$

$= -\frac{1}{2}\left[e^{-x^2}\right]_0^{\sqrt{-\log a}} - \left[\frac{1}{2}ax^2\right]_0^{\sqrt{-\log a}}$

$= -\frac{1}{2}(e^{\log a} - 1) + \frac{1}{2}a\log a = \frac{a\log a - a + 1}{2}$ //

(3) $\frac{1}{2} - S(a) = \frac{a(1-\log a)}{2}$

ここで，$0 < a \leqq 1$ なので

$a > 0$，$1 - \log a > 0$

$\therefore \frac{1}{2} - S(a) > 0$

$\therefore S(a) < \frac{1}{2}$