東京海洋大学

2016年 海洋科学 第1問

数理 石井K

$\boxed{1}$ 3次関数 $f(x)=x^3-3x^2+5$ について次の問に答えよ．

(1) $f(x)$ の極値を求め，$y=f(x)$ のグラフをかけ．

(2) 点 $\mathrm{P}(p,\ f(p))$ を通る直線が点Pとは異なる点 $\mathrm{Q}(q,\ f(q))$ で曲線 $y=f(x)$ に接するとき，q を p で表せ．

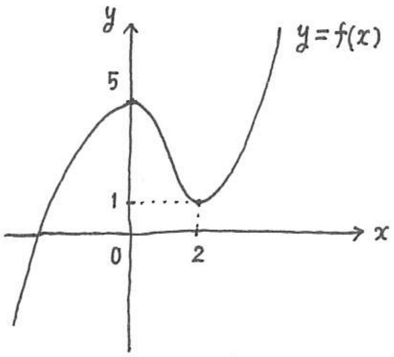
(1) $f'(x)=3x^2-6x$

$=3x(x-2)$

∴ 増減表は右のようになる

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	5	$\searrow$	1	$\nearrow$
		極大		極小	

したがって，$y=f(x)$ のグラフは下のようになる．



(2) 点Qにおける接線は，$y=3q(q-2)(x-q)+q^3-3q^2+5$

これが点Pを通ることより，

$p^3-3p^2+5=3q(q-2)(p-q)+q^3-3q^2+5$

$\therefore (p-q)(p^2+pq+q^2)-3(p-q)(p+q)-3q(q-2)(p-q)=0$

$(p-q)(p^2+pq+q^2-3p-3q-3q^2+6q)=0$

$(p-q)\{p^2+(q-3)p-q(2q-3)\}=0$

$\begin{matrix}1 & & -q\\ & \times & \\ 1 & & 2q-3\end{matrix}$

$(p-q)^2(p+2q-3)=0$

$p\neq q$ より，$p+2q-3=0$

$\therefore \underline{q=-\frac{1}{2}p+\frac{3}{2}}$ //

(2)の別解

直線を $y=ax+b$ とおくと，

$f(x)-ax-b=0$

すなわち，

$x^3-3x^2-ax+5-b=0$

の解が，$p,\ q,\ q$

（点Qで接するので q は重解）

よって，解と係数の関係より，

$p+q+q=3$

$\therefore \underline{q=-\frac{1}{2}p+\frac{3}{2}}$ //