

2011年医学部第1問

1 0以上の任意の整数  $i$  に対して、 $x$  の  $i$  次式  $g_i(x)$  を  $i = 0$  のとき  $g_0(x) = 1$ ,  $i \geq 1$  のとき  $g_i(x) = \frac{x(x+1)\cdots(x+i-1)}{i!}$  と定義する.

- (1)  $f(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i$  (但し  $a_n \neq 0$ ) を  $x$  に関する実数係数の  $n$  ( $\geq 0$ ) 次式とする. このとき, 等式  $f(x) = \sum_{i=0}^n c_i g_i(x)$  が任意の実数  $x$  について成り立つような実数  $c_i$  ( $0 \leq i \leq n$ , 但し  $c_n \neq 0$ ) が一意的に存在することを証明せよ.
- (2) (1)において,  $n > 0$  のとき等式  $f(x) - f(x-1) = \sum_{i=1}^n c_i g_{i-1}(x)$  が成り立つことを証明せよ.
- (3)  $F(x)$  ( $\neq 0$ ) を  $x$  に関する実数係数の  $n$  ( $\geq 0$ ) 次式とし, 任意の整数  $a$  に対して  $F(a)$  が整数であると仮定する. このとき, 等式  $F(x) = \sum_{i=0}^n d_i g_i(x)$  が任意の実数  $x$  について成り立つような整数  $d_i$  ( $0 \leq i \leq n$ , 但し  $d_n \neq 0$ ) が一意的に存在することを証明せよ.