0000617452839999

室蘭工業大学

2011年 工学部 第3問

数理 石井K

3 数列 $\{a_n\}$ が次の条件を満たすとする．

$$a_1=1,\quad a_{n+1}=\frac{1}{2}a_n+\frac{1}{3^n}\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

(1) $b_n=2^na_n$ とおくとき，$b_{n+1}-b_n$ を n を用いて表せ．

(2) 数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ．

(1) 与式の両辺に 2^{n+1} をかけて．

$$2^{n+1}a_{n+1}=2^na_n+\frac{2^{n+1}}{3^n}$$

よって，$b_{n+1}=b_n+2\cdot\frac{2^n}{3^n}$

$$\therefore\ \underline{b_{n+1}-b_n=2\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^n}\ //$$

(2) (1) より．$n\geqq 2$ のとき．

$$b_n=b_1+\sum_{k=1}^{n-1}2\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^k$$ ・階差数列の公式

$b_1=2^1\cdot a_1=2$ より．$n\geqq 2$ のとき

$$b_n=2+2\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{2}{3}\right)^k$$ ← 等比数列の和の公式を使う．

$$=2+2\cdot\frac{\frac{2}{3}\left\{1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\right\}}{1-\frac{2}{3}}$$

$$=2+4\left\{1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\right\}$$

$$=6-4\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$$

これは $n=1$ のときも成り立っている．

$\therefore\ a_n=\frac{b_n}{2^n}$ より．

$$a_n=\frac{6}{2^n}-2\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

$$=\underline{6\left(\frac{1}{2^n}-\frac{1}{3^n}\right)}\ //$$ ← 答えの書き方は1通りではない

$\frac{3}{2^{n-1}}-\frac{2}{3^{n-1}}$ などでもO.K.