

2015年 都市教養（文系）第3問

3 関数 $f(x)$, $g(x)$ を

$$f(x) = x^3 - 5x^2$$

$$g(x) = 3^{3x} + 3^{-3x} - 5(3^{2x} + 3^{-2x}) + 3(3^x + 3^{-x})$$

で定めるとき、以下の問いに答えなさい。

- (1) $f(x)$ のすべての極値と極値を与える x の値を求めなさい。
 (2) $t = 3^x + 3^{-x}$ とするとき、 $g(x)$ を t の式で表しなさい。
 (3) $g(x)$ の最小値と最小値を与える x の値を求めなさい。

x	...	0	...	$\frac{10}{3}$...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗	0	↘	$-\frac{500}{27}$	↗

$$\begin{aligned} (1) \quad f'(x) &= 3x^2 - 10x \\ &= 3x(x - \frac{10}{3}) \end{aligned}$$

∴ $f'(x) = 0$ となるのは、 $x = 0, \frac{10}{3}$ で、増減表は右上となる

∴ 極大値 0 ($x=0$ のとき), 極小値 $-\frac{500}{27}$ ($x=\frac{10}{3}$ のとき) //

$$\begin{aligned} (2) \quad g(x) &= (3^x + 3^{-x})^3 - 3 \cdot 3^x \cdot 3^{-x} (3^x + 3^{-x}) - 5(3^x + 3^{-x})^2 + 10 + 3(3^x + 3^{-x}) \\ &= t^3 - 3t - 5t^2 + 10 + 3t \\ &= \underline{t^3 - 5t^2 + 10} \quad (ただし, t = 3^x + 3^{-x} \geq 2) \end{aligned}$$

(3) (2) で求めた t の式を y とおいて、 $y = t^3 - 5t^2 + 10$ ($t \geq 2$) とする

$$y' = 3t^2 - 10t = f'(t)$$

∴ 増減表は右のようになる。

t	2	...	$\frac{10}{3}$...
y'		-	0	+
y	-2	↘	$-\frac{230}{27}$	↗

$$t = \frac{10}{3} \text{ となるのは, } 3^x + 3^{-x} = \frac{10}{3}$$

$$\therefore (3^x)^2 - \frac{10}{3} \cdot 3^x + 1 = 0$$

$$\therefore 3^x = \frac{\frac{10}{3} \pm \sqrt{\frac{100}{9} - 4}}{2} \quad \therefore 3^x = 3, \frac{1}{3} \quad \therefore x = \pm 1$$

∴ 最小値 $-\frac{230}{27}$ ($x = \pm 1$ のとき) //