

2012年 工学科学 第2問

2 xyz 空間内に四面体 $PABC$ がある. $\triangle ABC$ は xy 平面内にある鋭角三角形とし, 頂点 P の z 座標は正とする. P から xy 平面に下ろした垂線を PH とし, H は $\triangle ABC$ の内部にあるとする. H から直線 AB, BC, CA に下ろした垂線をそれぞれ HK_1, HK_2, HK_3 とする. そのとき $PK_1 \perp AB, PK_2 \perp BC, PK_3 \perp CA$ である. $\angle PK_1H = \alpha_1, \angle PK_2H = \alpha_2, \angle PK_3H = \alpha_3$ とし, $\triangle PAB, \triangle PBC, \triangle PCA$ の面積をそれぞれ S_1, S_2, S_3 とする.

(1) $\triangle HAB$ の面積を α_1, S_1 を用いて表せ.

(2) 3つのベクトル $\vec{l}_1, \vec{l}_2, \vec{l}_3$ は, 大きさがそれぞれ S_1, S_2, S_3 であり, 向きがそれぞれ平面 PAB , 平面 PBC , 平面 PCA に垂直であるとする. ただし, $\vec{l}_1, \vec{l}_2, \vec{l}_3$ の z 成分はすべて正とする. このとき, $\vec{l}_1 + \vec{l}_2 + \vec{l}_3$ の z 成分は $\triangle ABC$ の面積に等しいことを示せ.

(3) 3辺 AB, BC, CA の長さの比 $AB : BC : CA$ を, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, S_1, S_2, S_3$ を用いて表せ.