

2011年 医学部 第4問

4  $xy$  平面において原点  $O(0, 0)$  を中心とする半径 1 の円を  $S$  とし、円  $S$  の任意の点  $P$  に対して、点  $P$  における円  $S$  の接線を  $L(P)$  とおく。

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

を全ての成分が実数からなる 2 行 2 列の行列とし、 $A$  によって定まる  $xy$  平面の一次変換

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

を  $\varphi$  とおく。このとき、円  $S$  の任意の点  $P$  に対して円  $S$  の点  $Q$  が存在し、接線  $L(P)$  のいかなる点も  $\varphi$  によって接線  $L(Q)$  の点に移されると仮定する。

- (1) 円  $S$  の点  $P$  の座標を  $(s, t)$  として、接線  $L(P)$  の方程式を求めよ。
- (2) 行列  $A$  は逆行列を持つことを証明せよ。
- (3) 円  $S$  の点  $Q$  は円  $S$  の点  $P$  により一意的に定まることを示し、点  $Q$  の座標  $(u, v)$  を点  $P$  の座標  $(s, t)$  及び行列  $A$  の成分  $a, b, c, d$  を用いて表示せよ。
- (4)  $xy$  平面の一次変換  $\varphi$  は、原点  $O(0, 0)$  を中心とする回転か、または原点  $O(0, 0)$  を通るある直線  $l$  を対称軸とする対称変換のいずれかであることを証明せよ。