# 筑波大学

2013年 第2問

**2** $n$ は自然数とする．

(1) $1 \leqq k \leqq n$ を満たす自然数 $k$ に対して

$$\int_{\frac{k-1}{2n}\pi}^{\frac{k}{2n}\pi} \sin 2nt \cos t\, dt = (-1)^{k+1} \frac{2n}{4n^2-1}\left(\cos\frac{k}{2n}\pi + \cos\frac{k-1}{2n}\pi\right)$$

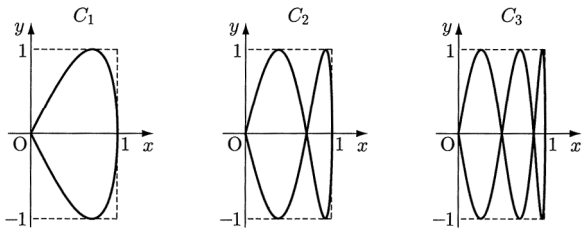
が成り立つことを示せ．

(2) 媒介変数 $t$ によって

$$x = \sin t, \quad y = \sin 2nt \quad (0 \leqq t \leqq \pi)$$

と表される曲線 $C_n$ で囲まれた部分の面積 $S_n$ を求めよ．ただし必要なら

$$\sum_{k=1}^{n-1} \cos\frac{k}{2n}\pi = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\tan\frac{\pi}{4n}} - 1\right) \quad (n \geqq 2)$$

を用いてよい．

(3) 極限値 $\lim_{n\to\infty} S_n$ を求めよ．