2012年 第2問

数理 石井K

2 空間のベクトル $\vec{a}$, $\vec{p}$, $\vec{q}$ を

$$\vec{a}=\left(\frac{1}{2},\ \frac{\sqrt{3}}{2},\ 0\right),\quad \vec{p}=\left(1,\ \frac{\sqrt{3}}{3},\ 1\right),\quad \vec{q}=(-1,\ \sqrt{3},\ 2)$$

で定める．また $\alpha=\vec{p}\cdot\vec{a}$, $\beta=\vec{q}\cdot\vec{a}$ とおく．次の問いに答えよ．

(1) $\vec{b}=\vec{p}-\alpha\vec{a}$ とする．$\vec{b}$ を成分で表せ．

(2) $\vec{c}=\vec{q}-\beta\vec{a}-\dfrac{\vec{q}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|^2}\vec{b}$ とする．$\vec{c}$ を成分で表せ．

(3) 座標空間の原点を O とする．$\vec{a}=\overrightarrow{OA}$, $\vec{b}=\overrightarrow{OB}$, $\vec{c}=\overrightarrow{OC}$ となる 3 点 A, B, C に対して，四面体 OABC の体積 V を求めよ．

(1) $\alpha=\vec{p}\cdot\vec{a}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+0=1$, $\beta=\vec{q}\cdot\vec{a}=-\frac{1}{2}+\frac{3}{2}+0=1$

$\therefore\ \vec{b}=\vec{p}-\vec{a}=\left(\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{3}}{6},1\right)$ //

(2) $\vec{q}\cdot\vec{b}=-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+2=1$, $|\vec{b}|^2=\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(-\frac{\sqrt{3}}{6}\right)^2+1^2=\frac{4}{3}$

$\therefore\ \vec{c}=\vec{q}-\vec{a}-\frac{3}{4}\vec{b}$

$=\left(-\frac{15}{8},\frac{5\sqrt{3}}{8},\frac{5}{4}\right)$ //

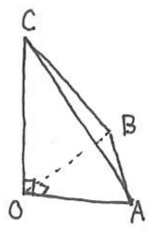
(3) $\vec{a}\cdot\vec{b}=\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2},0\right)\cdot\left(\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{3}}{6},1\right)=\frac{1}{4}-\frac{1}{4}+0=0$ $\quad\therefore\ \vec{a}\perp\vec{b}$

$\vec{b}\cdot\vec{c}=\left(\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{3}}{6},1\right)\cdot\left(-\frac{15}{8},\frac{5\sqrt{3}}{8},\frac{5}{4}\right)=-\frac{15}{16}-\frac{5}{16}+\frac{5}{4}=0$ $\quad\therefore\ \vec{b}\perp\vec{c}$

$\vec{c}\cdot\vec{a}=\left(-\frac{15}{8},\frac{5\sqrt{3}}{8},\frac{5}{4}\right)\cdot\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2},0\right)=-\frac{15}{16}+\frac{15}{16}+0=0$ $\quad\therefore\ \vec{c}\perp\vec{a}$

∴ 四面体OABCは,

底面が OA⊥OB の直角三角形で高さが OC の三角すいと考えることができ,



$|\vec{a}|=1$, $|\vec{b}|=\frac{2}{\sqrt{3}}$, $|\vec{c}|=\frac{5}{2}$ より,

$V=\frac{1}{2}\cdot|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot|\vec{c}|\cdot\frac{1}{3}=\frac{5\sqrt{3}}{18}$ //