0001924455708999

名古屋市立大学

2014年 医学部 第1問　　1枚目／2枚　　数理 石井K

$\boxed{1}$ xy 平面上に動点 P$(t,\ 2t)$，Q$(t-1,\ 1-t)$ がある．ただし，$0 \leqq t \leqq 1$ とする．次の問いに答えよ．

(1) 実数 k に対して直線 $x=k$ と直線 PQ との交点を求めよ．
(2) 閉区間 $[-1,\ 1]$ 内の定数 a に対し，直線 $x=a$ と線分 PQ との交点の y 座標のとり得る範囲を a で表せ．
(3) t が 0 から 1 まで動くとき，線分 PQ が動く領域 S の面積を求めよ．
(4) S を x 軸の周りに1回転させた回転体の体積を求めよ．

(1) PQ : $y=\dfrac{2t-(1-t)}{t-(t-1)}(x-t)+2t$

$\therefore$ PQ : $y=(3t-1)x-3t^2+3t$　　$\therefore$ 交点は $\underline{(k,\ (3t-1)k-3t^2+3t)}$ //

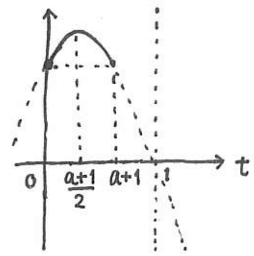
(2) (1)より．

$t-1 \leqq a \leqq t$ のとき．交点の y 座標 $Y(t)$ は．

$$Y(t)=(3t-1)a-3t^2+3t$$
$$=-3\left(t-\frac{a+1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}a^2+\frac{1}{2}a+\frac{3}{4}$$

$t-1 \leqq a \leqq t$ すなわち $a \leqq t \leqq a+1$ と $0 \leqq t \leqq 1$ であるから

(i) $-1 \leqq a < 0$ のとき．

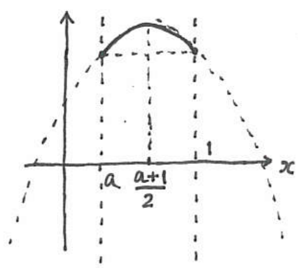


交点をもつ t の範囲は．$0 \leqq t \leqq a+1$

$\therefore$ $Y(0) \leqq Y(t) \leqq Y\left(\frac{a+1}{2}\right)$

$\therefore$ $-a \leqq Y(t) \leqq \frac{3}{4}a^2+\frac{1}{2}a+\frac{3}{4}$

(ii) $0 \leqq a \leqq 1$ のとき



交点をもつ t の範囲は．$a \leqq t \leqq 1$

$\therefore$ $Y(1) \leqq Y(t) \leqq Y\left(\frac{a+1}{2}\right)$

$\therefore$ $2a \leqq Y(t) \leqq \frac{3}{4}a^2+\frac{1}{2}a+\frac{3}{4}$

(i), (ii) より．

$$\begin{cases} -a \leqq Y(t) \leqq \frac{3}{4}a^2+\frac{1}{2}a+\frac{3}{4} & (-1 \leqq a < 0 \text{ のとき}) \\ 2a \leqq Y(t) \leqq \frac{3}{4}a^2+\frac{1}{2}a+\frac{3}{4} & (0 \leqq a \leqq 1 \text{ のとき}) \end{cases}$$

—— //

2枚目につづく

0001924455708999

名古屋市立大学

2014年 医学部 第1問　　2枚目／2枚　　数理 石井K

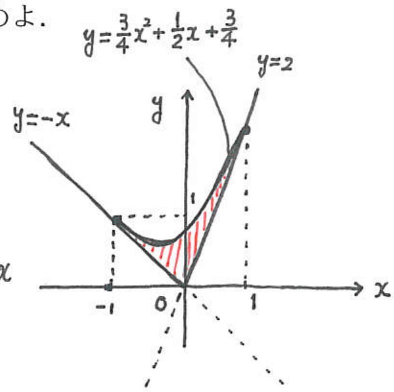
1 xy 平面上に動点 $P(t,\ 2t)$，$Q(t-1,\ 1-t)$ がある．ただし，$0 \leqq t \leqq 1$ とする．次の問いに答えよ．

(1) 実数 k に対して直線 $x=k$ と直線PQとの交点を求めよ．

(2) 閉区間 $[-1,\ 1]$ 内の定数 a に対し，直線 $x=a$ と線分PQとの交点の y 座標のとり得る範囲を a で表せ．

(3) t が0から1まで動くとき，線分PQが動く領域 S の面積を求めよ．

(4) S を x 軸の周りに1回転させた回転体の体積を求めよ．



(3) (2)より，領域Sは右図の斜線部分であり，

面積は，

$$\int_{-1}^{0} \frac{3}{4}x^2+\frac{1}{2}x+\frac{3}{4}-(-x)\,dx + \int_{0}^{1} \frac{3}{4}x^2+\frac{1}{2}x+\frac{3}{4}-2x\,dx$$

$$= \left[\frac{x^3}{4}+\frac{3}{4}x^2+\frac{3}{4}x\right]_{-1}^{0} + \left[\frac{x^3}{4}-\frac{3}{4}x^2+\frac{3}{4}x\right]_{0}^{1}$$

$$= \underline{\frac{1}{2}}\ //$$

(4) 求める体積は，

$$V = \pi\int_{-1}^{0} \left(\frac{3}{4}x^2+\frac{1}{2}x+\frac{3}{4}\right)^2-(-x)^2\,dx + \pi\int_{0}^{1} \left(\frac{3}{4}x^2+\frac{1}{2}x+\frac{3}{4}\right)^2-(2x)^2\,dx$$

$$= \frac{\pi}{16}\int_{-1}^{1} (3x^2+2x+3)^2\,dx - \pi\int_{-1}^{0} x^2\,dx - \pi\int_{0}^{1} 4x^2\,dx$$

$$= \frac{\pi}{16}\int_{-1}^{1} 9x^4+12x^3+22x^2+12x+9\,dx - \pi\left[\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{0} - \pi\left[\frac{4}{3}x^3\right]_{0}^{1}$$

$$= \frac{\pi}{16}\left[\frac{9}{5}x^5+3x^4+\frac{22}{3}x^3+6x^2+9x\right]_{-1}^{1} - \frac{\pi}{3} - \frac{4}{3}\pi$$

$$= \frac{34}{15}\pi - \frac{5}{3}\pi$$

$$= \underline{\frac{3}{5}\pi}\ //$$