

2013年 医学部 第4問

4 原点を  $O$  とする  $xyz$  空間内に 1 辺の長さが 1 の正四面体  $OPQR$  がある。点  $P, Q, R$  を通り  $z$  軸に平行な 3 直線と  $xy$  平面との交点をそれぞれ  $P', Q', R'$  とするとき、次の問いに答えよ。

- (1)  $\triangle PQR, \triangle P'Q'R'$  の面積をそれぞれ  $S, S_1$  とする。  $P, Q, R$  の 3 点を通る平面と  $xy$  平面のなす角を  $\theta$  とするとき、  $S_1 = S|\cos\theta|$  を示せ。
- (2)  $O$  が  $\triangle P'Q'R'$  の周上を含む内部にあるとき、  $z$  軸と  $\triangle PQR$  の交点を  $A$  とする。このとき正四面体  $OPQR$  の体積  $V$  は  $V = \frac{1}{3}OA \cdot S_1$  となることを示し、  $S_1$  の最小値を求めよ。
- (3)  $O$  が  $\triangle P'Q'R'$  の外部にあり、線分  $OP'$  と線分  $Q'R'$  が交点  $B$  をもつとき、点  $B$  を通り  $z$  軸に平行な直線と、直線  $OP$  および直線  $QR$  との交点をそれぞれ  $C, D$  とする。このとき四角形  $OQ'P'R'$  の面積を  $S_2$  とすると  $V = \frac{1}{3}CD \cdot S_2$  となることを示し、  $S_2$  の最大値を求めよ。