2015年 コンピュータ理工 第5問

$\boxed{5}$ 関数 $y = xe^{-x}$ のグラフを C とするとき，以下の問いに答えよ．

(1) 関数 $y = xe^{-x}$ の増減，極値，C の凹凸，変曲点を調べて，増減表をつくり，C を座標平面上に描け．ただし，$\lim_{x \to \infty} xe^{-x} = 0$ を用いてもよい．

(2) C の変曲点における接線を ℓ とする．ℓ と x 軸の交点を求めよ．

(3) C と ℓ と x 軸で囲まれた部分の面積を求めよ．

(1) $y' = e^{-x} + x \cdot (-e^{-x}) = (1-x)e^{-x}$

$y'' = -e^{-x} + (1-x) \cdot (-e^{-x}) = (x-2)e^{-x}$

$\lim_{x \to -\infty} xe^{-x} = -\infty$, $\lim_{x \to \infty} xe^{-x} = 0$

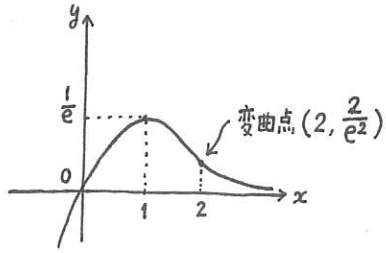
よって，増減表は右のようになる．

x	$(-\infty)$	$\cdots$	1	$\cdots$	2	$\cdots$	(∞)
y'		$+$	0	$-$	$-$	$-$	
y''		$-$	$-$	$-$	0	$+$	
y	$(-\infty)$	↗	e^{-1}	↘	$2e^{-2}$	↘	(0)

極大

極大値は $\frac{1}{e}$ ($x=1$ のとき)，変曲点は $\left(2, \frac{2}{e^2}\right)$

∴ グラフは右のようになる．



(2) $y' = (1-x)e^{-x}$ に $x=2$ を代入すると，

ℓ の傾きは，$-\frac{1}{e^2}$

$\therefore \ell : y = -\frac{1}{e^2}(x-2) + \frac{2}{e^2}$

$\therefore \ell : y = -\frac{1}{e^2}x + \frac{4}{e^2}$　　∴ x 軸との交点は $\underline{(4, 0)}$ //

(3) $S = \int_0^2 xe^{-x}dx + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{e^2} \cdot 2$

$= \int_0^2 x(-e^{-x})'dx + \frac{2}{e^2}$

$= \left[-xe^{-x}\right]_0^2 - \int_0^2 -e^{-x}dx + \frac{2}{e^2}$

$= -\frac{2}{e^2} - \left[e^{-x}\right]_0^2 + \frac{2}{e^2}$

$= \underline{1 - \frac{1}{e^2}}$ //