2015 年 工学部 第 3 問

3 次の Ⅰ, Ⅱ に答えよ.

Ⅰ 次の 5 つの定積分を求めよ. (Ⅱ (4) で用いる.)

$$I_1 = \int_0^{\pi} x \sin x \, dx, \quad I_2 = \int_0^{\pi} x^2 \cos x \, dx, \quad I_3 = \int_0^{\pi} \sin^2 x \, dx$$

$$I_4 = \int_0^{\pi} x \cos x \sin x \, dx, \quad I_5 = \int_0^{\pi} \sin^2 x \cos x \, dx$$

Ⅱ 関数 $y = \sin x$ のグラフを曲線 C とする. C 上の点 $\mathrm{O}(0,\ 0)$ における接線を ℓ_1, 点 $\mathrm{A}(\pi,\ 0)$ における接線を ℓ_2 とする.

ℓ_1 と ℓ_2 の交点を B, C 上の点 $\mathrm{P}(t,\ \sin t)$ $(0 \leqq t \leqq \pi)$ から ℓ_1 に下ろした垂線を PQ とする. ただし, $t = 0$ のときは $\mathrm{Q} = \mathrm{P}$ とする. $\mathrm{OQ} = s$ とおく.

(1) $\angle \mathrm{OBA}$ の大きさを求めよ.

(2) s を t を用いて表せ.

(3) 線分 PQ の長さを t を用いて表せ.

(4) 曲線 C と 2 直線 ℓ_1, ℓ_2 で囲まれた部分を, 直線 ℓ_1 の周りに 1 回転させてできる立体の体積 V を求めよ.