2015 年 工学部 第 1 問　　1枚目／2枚

数理 石井K

$\boxed{1}$ 次の問いに答えよ．

(1) $x \geqq 1$ のとき，不等式 $2\sqrt{x} > 1 + \log x$ が成り立つことを証明せよ．

(2) 関数 $y = x \log x$ $(x > 0)$ のグラフを曲線 C とする．定数 a に対し，曲線 C の接線で点 $(a,\ 0)$ を通るものは何本あるか．

(3) (2) で定められた曲線 C とその傾き 2 の接線および直線 $x = e^{-2}$ で囲まれた部分の面積を求めよ．

(1) $f(x) = 2\sqrt{x} - 1 - \log x$ とおくと．$f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}} - \dfrac{1}{x} = \dfrac{\sqrt{x}-1}{x}$

$\therefore$ $x \geqq 1$ のとき $f'(x) \geqq 0$ となり．$f(x)$ はこの範囲で単調増加．

$\therefore$ $f(x) \geqq f(1) = 1$　$\therefore$ $f(x) > 0$ となり．$2\sqrt{x} > 1 + \log x$ が成り立つ ▨

(2) $y' = \log x + x \cdot \dfrac{1}{x}$　$\therefore$ $y' = 1 + \log x$　$\therefore$ 接点を $(t,\ t\log t)$　$(t > 0)$ とおくと．

接線は．$y = (1+\log t)(x - t) + t\log t$　$\therefore$ $y = (1+\log t)x - t$

これが $(a,0)$ を通るとき．$0 = (1+\log t)a - t$ が成り立つ

$t = \dfrac{1}{e}$ のときは．この式は成り立たないので．$t \neq \dfrac{1}{e}$ とすると．$1 + \log t \neq 0$

$\therefore$ $a = \dfrac{t}{1+\log t}$　ここで，$g(t) = \dfrac{t}{1+\log t}$ とおくと．$g'(t) = \dfrac{1+\log t - t \cdot \frac{1}{t}}{(1+\log t)^2}$

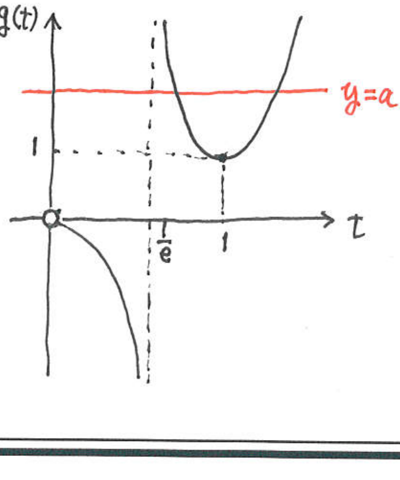
$\therefore$ $g'(t) = \dfrac{\log t}{(1+\log t)^2}$

$\displaystyle\lim_{t \to +0} g(t) = 0$

t	(0)	$\cdots$	$\frac{1}{e}$	$\cdots$	1	$\cdots$
$g'(t)$		$-$	／	$-$	0	$+$
$g(t)$		$\searrow$	／	$\searrow$	1	$\nearrow$

また．$\displaystyle\lim_{t \to \frac{1}{e}-0} g(t) = -\infty$，$\displaystyle\lim_{t \to \frac{1}{e}+0} g(t) = +\infty$

$\displaystyle\lim_{t \to \infty} g(t) = +\infty$ よりグラフは右下のようになる



よって，
$$\begin{cases} a > 1 \text{ のとき } 2\text{本} \\ a = 1,\ a < 0 \text{ のとき } 1\text{本} \\ 0 \leqq a < 1 \text{ のとき } 0\text{本} \end{cases}$$
//

2015年 工学部 第1問

2枚目／2枚

数理 石井K

$\boxed{1}$ 次の問いに答えよ．

(1) $x \geqq 1$ のとき，不等式 $2\sqrt{x} > 1 + \log x$ が成り立つことを証明せよ．

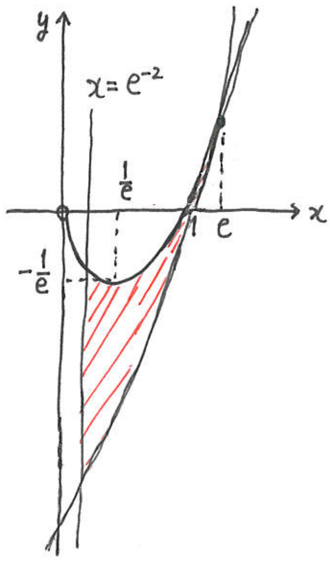
(2) 関数 $y = x \log x\ (x > 0)$ のグラフを曲線 C とする．定数 a に対し，曲線 C の接線で点 $(a,\ 0)$ を通るものは何本あるか．

(3) (2) で定められた曲線 C とその傾き 2 の接線および直線 $x = e^{-2}$ で囲まれた部分の面積を求めよ．

(3) $y' = 1 + \log x$ より

$y = x \log x\ (x > 0)$ の増減表は右のようになる．

x	(0)	$\cdots$	$\frac{1}{e}$	$\cdots$
y'		$-$	0	$+$
y		$\searrow$	$-\frac{1}{e}$	$\nearrow$



傾きが 2 となるのは $1 + \log x = 2$

$\therefore x = e$ のとき $\therefore$ 接点は (e, e)

$\therefore$ 求める面積を S とおくと．

$$S = \int_{e^{-2}}^{e} x\log x - 2(x-e) - e\, dx$$

$$= \int_{e^{-2}}^{e} x\log x\, dx - \int_{e^{-2}}^{e} 2x - e\, dx$$

$$= \int_{e^{-2}}^{e} \left(\frac{1}{2}x^2\right)' \log x\, dx - \left[x^2 - ex\right]_{e^{-2}}^{e}$$

$$= \left[\frac{1}{2}x^2 \log x\right]_{e^{-2}}^{e} - \int_{e^{-2}}^{e} \frac{1}{2}x\, dx - \left(e^2 - e^2 - e^{-4} + e^{-1}\right)$$

$$= \frac{e^2}{2} - \frac{e^{-4}}{2}\cdot(-2) - \left[\frac{x^2}{4}\right]_{e^{-2}}^{e} + e^{-4} - e^{-1}$$

$$= \frac{e^2}{2} + e^{-4} - \frac{e^2}{4} + \frac{e^{-4}}{4} + e^{-4} - e^{-1}$$

$$= \underline{\frac{1}{4}\left(e^2 - 4e^{-1} + 9e^{-4}\right)}\ /\!/$$