



2015年 獣医学部・海洋生命科学学部 第7問

7 関数  $f(x) = x^3 - 3(a+1)x^2 + 12ax - 12a + \frac{7}{2}$  について、以下の問に答えよ。ただし、 $a$  は定数とする。

- (1) 方程式  $f(x) = 0$  が異なる3個の実数解をもつように定数  $a$  の値の範囲を定めよ。  
 (2) 方程式  $f(x) = 0$  が異なる3個の正の実数解をもつように定数  $a$  の値の範囲を定めよ。

$$\begin{aligned} (1) f'(x) &= 3x^2 - 6(a+1)x + 12a \\ &= 3(x-2a)(x-2) \end{aligned}$$

$a=1$  のとき、 $f(x) = 3(x-2)^3 \geq 0$   $\therefore f(x)$  は単調増加となり不適

$a \neq 1$  のとき、極値をとるのは  $x = 2a, 2$

$$\begin{aligned} \therefore \text{異なる3個の実数解をもつ} &\Leftrightarrow f(2a) \cdot f(2) < 0 \\ &\Leftrightarrow (-4a^3 + 12a^2 - 12a + \frac{7}{2}) \cdot (-\frac{1}{2}) < 0 \\ &\Leftrightarrow 8a^3 - 24a^2 + 24a - 7 < 0 \\ &\Leftrightarrow (2a-1)(4a^2 - 10a + 7) < 0 \\ &\qquad\qquad\qquad = 4(a - \frac{5}{4})^2 + \frac{3}{4} > 0 \\ &\Leftrightarrow \underline{a < \frac{1}{2}} \end{aligned}$$

(2) 右のグラフより、異なる3個の正の実数解をもつのは、

$$\begin{cases} (1) \text{の条件} \\ f(0) < 0 \\ 2a > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a < \frac{1}{2} \\ -12a + \frac{7}{2} < 0 \\ a > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \underline{\frac{7}{24} < a < \frac{1}{2}}$$

