2015 年 第 3 問

$\boxed{3}$ e を自然対数の底とし，t を $t > e$ となる実数とする．このとき，曲線 $C : y = e^x$ と直線 $y = tx$ は相異なる 2 点で交わるので，交点のうち x 座標が小さいものを P，大きいものを Q とし，P，Q の x 座標をそれぞれ α，β $(\alpha < \beta)$ とする．また，P における C の接線と Q における C の接線との交点を R とし，曲線 C，x 軸および 2 つの直線 $x = \alpha$，$x = \beta$ で囲まれる部分の面積を S_1，曲線 C および 2 つの直線 PR，QR で囲まれる部分の面積を S_2 とする．このとき，次の問に答えよ．

(1) $\dfrac{S_2}{S_1}$ を α と β を用いて表せ．

(2) $\alpha < \dfrac{e}{t}$，$\beta < 2\log t$ となることを示し，$\displaystyle\lim_{t\to\infty}\frac{S_2}{S_1}$ を求めよ．必要ならば，$x > 0$ のとき $e^x > x^2$ であることを証明なしに用いてよい．