

2013年工学部第1問


 数理  
石井

1 2次正方行列  $A$  と 2つの列ベクトル  $X = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ ,  $Y = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$  があり,  $AX = 3Y$ ,  $AY = X$  が成り立っているとする. 下の問いに答えなさい.

- (1)  $A$  と  $A^2$  を求めなさい.  
 (2) 自然数  $n$  について  $A^n$  を求めなさい.

$$(1) A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \text{ とおくと, } AX = 3Y \text{ より } \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\therefore 2a + 5b = 3 \dots \textcircled{1} \quad 2c + 5d = 9 \dots \textcircled{2}$$

$$AY = X \text{ より } \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} \therefore a + 3b = 2 \dots \textcircled{3}, \quad c + 3d = 5 \dots \textcircled{4}$$

$$\textcircled{1} \textcircled{3} \text{ より } a = -1, b = 1 \quad \textcircled{2}, \textcircled{4} \text{ より } c = 2, d = 1$$

$$\therefore A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

(2) (i) より.

$$n: \text{偶数のとき. } A^n = (A^2)^{\frac{n}{2}} = (3E)^{\frac{n}{2}} = 3^{\frac{n}{2}} E \quad (E \text{ は単位行列})$$

$$n: \text{奇数のとき. } n \geq 3 \text{ のときは, } A^n = A^{n-1} \cdot A$$

$$= 3^{\frac{n-1}{2}} \cdot E \cdot A$$

$$= 3^{\frac{n-1}{2}} A \quad \text{これは } n=1 \text{ のときも成り立つ}$$

$$\therefore A^n = \begin{cases} \begin{pmatrix} 3^{\frac{n}{2}} & 0 \\ 0 & 3^{\frac{n}{2}} \end{pmatrix} & (n: \text{偶数のとき}) \\ \begin{pmatrix} -3^{\frac{n-1}{2}} & 3^{\frac{n-1}{2}} \\ 2 \cdot 3^{\frac{n-1}{2}} & 3^{\frac{n-1}{2}} \end{pmatrix} & (n: \text{奇数のとき}) \end{cases}$$

〃