2014年 第3問

数理 石井K

[3] $f(x)=ax^2+bx$ は，$x=1,\ -1$ で整数値をとり，$f(1)=r$，$f(-1)=s$ とする．このとき，次の問いに答えよ．

(1) a，b を r，s の式で表わせ．

(2) 整数 n に対して，$f(n)$ を n，r，s の式で表わせ．

(3) n が整数のとき，$f(n)$ は常に整数になることを示せ．

(1) $f(1)=r$ より，$a+b=r$ …①

$f(-1)=s$ より．$a-b=s$ …②

①＋② より．$2a=r+s$ $\therefore$ $a=\dfrac{r+s}{2}$，$b=\dfrac{r-s}{2}$ //

(2) (1) より．

$f(x)=\dfrac{r+s}{2}x^2+\dfrac{r-s}{2}x$ なので $f(n)=\dfrac{r+s}{2}\cdot n^2+\dfrac{r-s}{2}n$ //

(3) (2) より

$$f(n)=\frac{r}{2}\cdot n^2+\frac{s}{2}\cdot n^2+\frac{r}{2}\cdot n-\frac{s}{2}\cdot n$$
$$=\frac{r(n+1)\cdot n}{2}+\frac{s(n-1)\cdot n}{2}$$

ここで，r，s は整数，n，$n+1$ と $n-1$，n はそれぞれ連続する整数なので，$\dfrac{(n+1)n}{2}$，$\dfrac{n(n-1)}{2}$ はともに整数

$n(n+1)$ と $n(n-1)$ は偶数!

$\therefore$ $f(n)=r\cdot\dfrac{n(n+1)}{2}+s\cdot\dfrac{n(n-1)}{2}$ は整数となる ■

すべて整数