福井大学

2015年 医学部 第3問

$\boxed{3}$ 正の整数 n について，$\sqrt{2n-1}$ 以下の最大の整数を a_n と定める．このとき，以下の問いに答えよ．

(1) 正の整数 m に対して，$a_n = m$ となる n はいくつあるか求めよ．

(2) 数列 $\{a_n\}$ の初項から第100項までの和を求めよ．

(3) $T_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k}$ とする．T_{12} の値を求めよ．また，$T_n > 10$ をみたす最小の n を求めよ．

(1) $a_n = m \iff m \leqq \sqrt{2n-1} < m+1$

$\iff m^2 \leqq 2n-1 < m^2+2m+1$

$\iff \frac{m^2+1}{2} \leqq n < \frac{m^2}{2}+m+1 \quad \cdots (*)$

(i) m：偶数のとき，$m=2m'$ (m'：正の整数) とおくと．

$(*) \iff 2m'^2+1 \leqq n < 2m'^2+2m'+1$

∴ これをみたす n は，$2m'^2+2m'+1-(2m'^2+1) = m$ 個

(ii) m：奇数のとき，$m=2m'-1$ (m'：正の整数) とおくと，

$(*) \iff 2m'^2-2m'+1 \leqq n \leqq 2m'^2-2m'+m+1$

∴ これをみたす n は，$2m'^2-2m'+m+1-(2m'^2-2m'+1)+1 = m+1$ 個

(i),(ii)より，m が偶数のとき m 個，m が奇数のとき $m+1$ 個．//

(2) $a_1 \leqq a_2 \leqq \cdots$ であり，$a_{98}=13$，$a_{99}=14$，$a_{100}=14$ より，(1)を使って

$$\sum_{k=1}^{100} a_k = 1\cdot2+2\cdot2+3\cdot4+4\cdot4+\cdots+13\cdot14+14\cdot2$$

$$=\left(\sum_{k=1}^{13} k^2\right)+(1+3+5+\cdots+13)+28$$

$$= \underline{896} \text{ //}$$

(3) $T_{12} = 1\cdot2+\frac{1}{2}\cdot2+\frac{1}{3}\cdot4+\frac{1}{4}\cdot4 = \underline{\frac{16}{3}}$ //

$$T_{42} = 1\cdot2+\frac{1}{2}\cdot2+\frac{1}{3}\cdot4+\frac{1}{4}\cdot4+\frac{1}{5}\cdot6+\frac{1}{6}\cdot6+\frac{1}{7}\cdot8+\frac{1}{8}\cdot8+\frac{1}{9}\cdot2 = 9+\frac{283}{315} < 10$$

$T_{43} = T_{42}+\frac{1}{9} = 9+\frac{318}{315} > 10 \quad$ ∴ $\underline{n=43}$ //