

2014年工・情報科学・社シス科学 第4問

4  $xy$  平面上に放物線  $C: y = \frac{1}{4}x^2 + 4$  と点  $P(p, 0)$  がある。ただし、 $p \geq 0$  とする。  $C$  上の点  $(p, \frac{1}{4}p^2 + 4)$  における  $C$  の接線を  $\ell$  とし、 $\ell$  に関して、 $P$  と対称な点を  $Q(X, Y)$  とするとき、次の問いに答えよ。

(1)  $p = 0$  のとき、 $Q(0, \text{ア})$  である。

(2)  $\ell$  の方程式は  $y = \frac{\text{ハ}}{\text{ニ}}x - \frac{\text{ホ}}{\text{ヘ}}p^2 + \text{ト}$  である。線分  $PQ$  の中点が  $\ell$  上にあることから

$$Y = \frac{\text{ハ}}{\text{ニ}}X + \text{キ} \quad \dots\dots(*)$$

が成り立つ。

(3)  $p > 0$  のとき、 $Q$  が、 $P$  を通り  $\ell$  と直交する直線上にあることから

$$Y = \frac{\text{ケ}}{p}X + \text{コ} \quad \dots\dots(**)$$

が成り立つ。(\*)と(\*\*)から  $p$  を消去することにより

$$X^2 + Y^2 - \text{サシ}Y + \text{スセ} = 0$$

が成り立つことがわかる。

(4)  $X$  の最小値は  $\text{ソタ}$  であり、このとき  $p = \text{チ}$  である。 $p$  が  $0$  から  $\text{チ}$  まで変化するとき、線分  $PQ$  が通過する部分の面積は  $\frac{\text{ツ}}{\text{テ}}\pi + \frac{\text{トナ}}{\text{ニ}}$  である。