

2016年 第2問

 数理
石井K

2 すべての自然数 n について、 $3^n - 2n + 3$ は 4 の倍数である。このことを、数学的帰納法を用いて示せ。

(i) $n = 1$ のとき、

$$3^1 - 2 \cdot 1 + 3 = 4 \quad \text{よって成り立つ}$$

(ii) $n = k$ のとき、成り立つと仮定すると、

$$3^k - 2k + 3 = 4m \quad (m \text{ は整数}) \text{ と表せる}$$

$$\therefore 3^k = 2k - 3 + 4m \quad \cdots \textcircled{1}$$

このとき、

$$\begin{aligned} 3^{k+1} - 2(k+1) + 3 &= 3 \cdot 3^k - 2(k+1) + 3 \\ &= 3(2k - 3 + 4m) - 2(k+1) + 3 \quad (\because \textcircled{1} \text{ より}) \end{aligned}$$

$$= 4k - 8 + 12m$$

$$= 4(k + 3m - 2)$$

$k + 3m - 2$ は整数であるから、これは 4 の倍数である

よって、 $n = k + 1$ のとき、成り立つ

(i), (ii) より、すべての自然数 n について、 $3^n - 2n + 3$ は 4 の倍数である \blacksquare