

2015年教育・薬学部第4問

4 区間 $0 \leq x \leq \pi$ 上で定義される関数

$$f(x) = \cos 2x - 4 \sin^3 x$$

について、以下の問いに答えよ。

- (1) 関数 $f(x)$ の最大値と最小値を求めよ。
- (2) 不定積分 $\int f(x) dx$ を求めよ。
- (3) 方程式 $f(x) = 0$ の解を求めよ。
- (4) 曲線 $y = f(x)$ と x 軸で囲まれた図形の面積を求めよ。

$$(1) \sin 3x = -4 \sin^3 x + 3 \sin x \text{ より}$$

$$f(x) = \cos 2x + \sin 3x - 3 \sin x \quad \dots \textcircled{1}$$

$$\therefore f'(x) = -2 \sin 2x + 3 \cos 3x - 3 \cos x$$

$$\cos 3x = 4 \cos^3 x - 3 \cos x \text{ より}$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \cos x (-4 \sin x + 12 \cos^2 x - 12) \\ &= -4 \sin x \cos x (3 \sin x + 1) \end{aligned}$$

$$0 \leq x \leq \pi \text{ において、} 3 \sin x + 1 > 0 \text{ より}$$

$$f'(x) = 0 \text{ と仮定すれば、} x = 0, \frac{\pi}{2}, \pi$$

$$\therefore \text{右の増減表より、最大値 } 1 (x=0, \pi), \text{ 最小値 } -5 (x=\frac{\pi}{2}) //$$

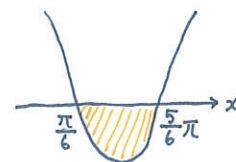
x	0	...	$\frac{\pi}{2}$...	π
$f'(x)$	0	-	0	+	0
$f(x)$	1	↓	-5	↑	1

$$(2) \textcircled{1} \text{ の } \textcircled{1} \text{ より、} \int f(x) dx = \frac{1}{2} \sin 2x - \frac{1}{3} \cos 3x + 3 \cos x + C \quad (C \text{ は積分定数}) //$$

$$\begin{aligned} (3) f(x) &= -4 \sin^3 x - 2 \sin^2 x + 1 \\ &= -(2 \sin x - 1)(2 \sin^2 x + 2 \sin x + 1) \end{aligned}$$

$$\therefore \sin x = \frac{1}{2} \quad \therefore x = \frac{\pi}{6}, \frac{5}{6}\pi //$$

$$\begin{aligned} (4) S &= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5}{6}\pi} -f(x) dx \\ &= \left[-\frac{1}{2} \sin 2x + \frac{1}{3} \cos 3x - 3 \cos x \right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5}{6}\pi} \\ &= \frac{7}{2} \sqrt{3} // \end{aligned}$$



$$\begin{array}{r} -2t^2 - 2t - 1 \\ 2t - 1 \overline{) -4t^3 - 2t^2 + 1} \\ \underline{-4t^3 + 2t^2} \\ -4t^2 + 2t \\ \underline{-4t^2 + 2t} \\ -2t + 1 \\ \underline{-2t + 1} \\ 0 \end{array}$$