



2015年 歯学・工学部 第2問

2 ひし形の紙がある (図1). 点線で半分に折ると正三角形になった (図2). これを少し開いて机の上に立てると, 三角錐の形になる (図3). その高さを次のようにして求めたい.

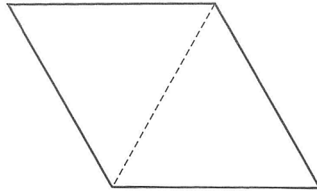


図1

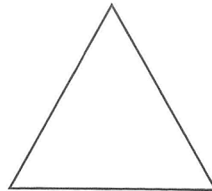


図2

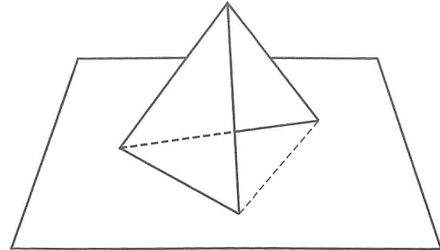


図3

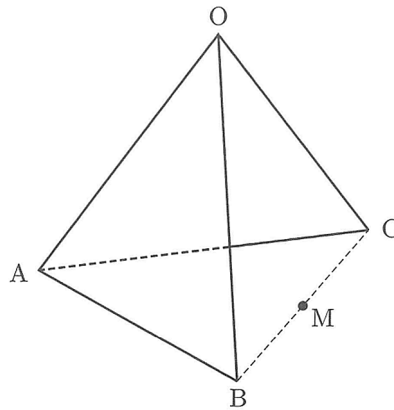


図4 (図3の拡大図)

図4において, 2つの正三角形OABとOACの1辺の長さを1とする. 点Oと平面ABCの距離が, 三角錐OABCの高さになる. 空間ベクトルを利用してこの高さを求める.  $\vec{OA} = \vec{a}$ ,  $\vec{OB} = \vec{b}$ ,  $\vec{OC} = \vec{c}$ ,  $\angle BOC = \theta$ とおき, 線分BCの中点をMとする. 以下の問いに答えよ.

- (1)  $\vec{OM}$ と $\vec{AM}$ を,  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{c}$ を用いて表せ.
- (2) 内積 $\vec{a} \cdot \vec{b}$ と $\vec{a} \cdot \vec{c}$ の値を求めよ. また,  $|\vec{b} + \vec{c}|^2$ の値を $\cos \theta$ を用いて表せ.
- (3) 実数 $t$ に対して $\vec{OH} = (1-t)\vec{OA} + t\vec{OM}$ とおくと, 点Hは直線AM上にある. このとき,  $\vec{OH} \perp \vec{BC}$ が成り立つことを示せ. さらに, Hが $\vec{OH} \perp \vec{AM}$ を満たす点であるとき,  $t$ の値を $\cos \theta$ を用いて表せ.
- (4) 三角錐OABCの高さを $h$ とする.  $h$ を $\cos \theta$ を用いて表せ. さらに,  $\vec{OM} \perp \vec{AM}$ が成り立つとき,  $\theta$ と $h$ の値を求めよ.