自治医科大学

2010年 医学部 第17問

数理 石井K

$\boxed{17}$ 三角形ABCにおいて，辺BC，AC，ABの長さを，それぞれa，b，cとし，∠A，∠B，∠Cの大きさを，それぞれA，B，Cで表すものとする．$a=2(b-c)\cos\dfrac{A}{2}$であるとき，$12\sin\dfrac{B-C}{2}$の値を求めよ．

△ABCの外接円の半径をRとおくと．

正弦定理より．

$a=2R\sin A$, $b=2R\sin B$, $c=2R\sin C$ であるから．

$a=2(b-c)\cos\frac{A}{2}$ に代入して．

$$2R\sin A=2(2R\sin B-2R\sin C)\cdot\cos\frac{A}{2}$$

$$\therefore\ 4R\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}-4R(\sin B-\sin C)\cdot\cos\frac{A}{2}=0$$

$\sin A=2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}$ を使った．

和積の公式 $\sin x-\sin y=2\cos\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}$ より．

$$4R\cos\frac{A}{2}\left(\sin\frac{A}{2}-2\cos\frac{B+C}{2}\sin\frac{B-C}{2}\right)=0$$

$0^\circ<\frac{A}{2}<90^\circ$ より．$\cos\frac{A}{2}\neq0$ なので

$$\sin\frac{A}{2}-2\cos\frac{B+C}{2}\sin\frac{B-C}{2}=0$$

また，$\cos\frac{B+C}{2}=\cos\frac{180^\circ-A}{2}$

$$=\sin\frac{A}{2}$$

$$\therefore\ \sin\frac{A}{2}\left(1-2\sin\frac{B-C}{2}\right)=0$$

$$\therefore\ \sin\frac{B-C}{2}=\frac{1}{2}$$

$$\therefore\ 12\sin\frac{B-C}{2}=\underline{6}$$