

2016年文系第2問

2 三角形OABの辺OAを $x:(1-x)$ の比に内分する点をX, 辺OBを $y:(1-y)$ の比に内分する点をYとする. ただし $0 < x < 1$, $0 < y < 1$ とする. 線分YAと線分XBの交点をZとする.

(1) 点Zが線分XBを $s:(1-s)$ の比に内分しているとする. s を x と y を用いて表せ.

(2) 辺OAの中点をC, 辺OBの中点をDとする. 点Zが線分CD上にあるための条件を x, y の式で表せ.

(1) メネラウスの定理より,

$$\frac{BY}{OY} \cdot \frac{OA}{AX} \cdot \frac{XZ}{ZB} = 1$$

$$\frac{1-y}{y} \cdot \frac{1}{1-x} \cdot \frac{s}{1-s} = 1$$

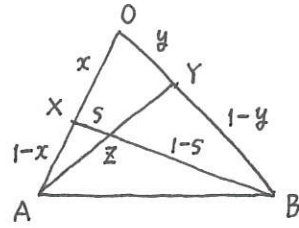
$$\therefore (1-y)s = y(1-x)(1-s)$$

$$s - ys = y - ys - xy + xys$$

$$\therefore (1-xy)s = (1-x)y$$

$$0 < x < 1, 0 < y < 1 \text{ より, } 0 < 1-xy < 1$$

$$\therefore s = \frac{(1-x)y}{1-xy} //$$



(2) (1) より,

$$\vec{OZ} = (1-s)\vec{OX} + s\vec{OB}$$

$$= (1-s)x\vec{OA} + s\vec{OB}$$

$$= 2(1-s)x\vec{OC} + 2s\vec{OD} \quad (\because \vec{OC} = \frac{1}{2}\vec{OA}, \vec{OD} = \frac{1}{2}\vec{OB} \text{ より})$$

\therefore 点Zが線分CD上にあることより,

$$2(1-s)x + 2s = 1 \quad \text{かつ} \quad 0 \leq 2(1-s)x \leq 1 \quad \text{かつ} \quad 0 \leq 2s \leq 1$$

$$\therefore \frac{(1-y)x}{1-xy} + \frac{(1-x)y}{1-xy} = \frac{1}{2} \quad \text{かつ} \quad 0 \leq \frac{(1-y)x}{1-xy} \quad \text{かつ} \quad 0 \leq \frac{(1-x)y}{1-xy}$$

$0 < x < 1, 0 < y < 1$ より,

$$\underline{3xy - 2x - 2y + 1 = 0} //$$