

2015年 医学部 第2問

- 2 ひし形の紙がある（図1）。点線で半分に折ると正三角形になった（図2）。これを少し開いて机の上に立てるとき、三角錐の形になる（図3）。その高さを次のようにして求めたい。

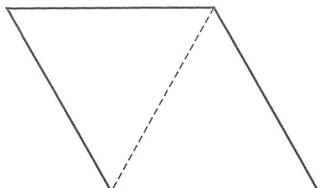


図1

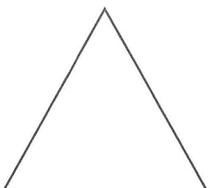


図2

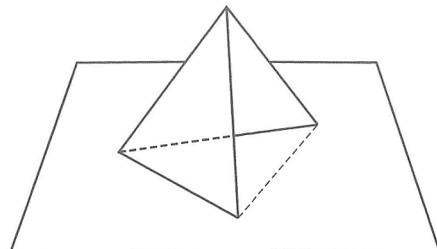


図3

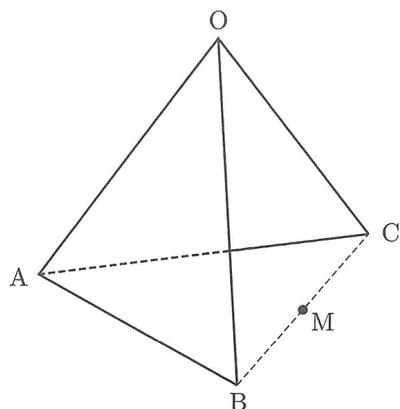


図4(図3の拡大図)

図4において、2つの正三角形OABとOACの1辺の長さを1とする。点Oと平面ABCの距離が、三角錐OABCの高さになる。空間ベクトルを利用してこの高さを求める。 $\vec{OA} = \vec{a}$ ,  $\vec{OB} = \vec{b}$ ,  $\vec{OC} = \vec{c}$ ,  $\angle BOC = \theta$  とき、線分BCの中点をMとする。以下の問い合わせよ。

- (1)  $\vec{OM}$  と  $\vec{AM}$  を、 $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{c}$  を用いて表せ。
- (2) 内積  $\vec{a} \cdot \vec{b}$  と  $\vec{a} \cdot \vec{c}$  の値を求めよ。また、 $|\vec{b} + \vec{c}|^2$  の値を  $\cos \theta$  を用いて表せ。
- (3) 実数  $t$  に対して  $\vec{OH} = (1-t)\vec{OA} + t\vec{OM}$  とおくと、点Hは直線AM上にある。このとき、 $\vec{OH} \perp \vec{BC}$  が成り立つことを示せ。さらに、Hが  $\vec{OH} \perp \vec{AM}$  を満たす点であるとき、 $t$  の値を  $\cos \theta$  を用いて表せ。
- (4) 三角錐OABCの高さを  $h$  とする。 $h$  を  $\cos \theta$  を用いて表せ。さらに、 $\vec{OM} \perp \vec{AM}$  が成り立つとき、 $\theta$  と  $h$  の値を求めよ。