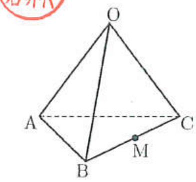
0001394725068999

長崎大学

2013年 第4問

数理 石井K



$\boxed{4}$ 右図のような四面体OABCがある．各面ABC，OBC，OCA，OABの重心を，それぞれP，Q，R，Sとし，辺BCの中点をMとする．また，$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{OC}=\vec{c}$，$\overrightarrow{OM}=\vec{m}$ とおく．次の問いに答えよ．

(1) $\overrightarrow{OQ}$ を $\vec{m}$ を用いて表せ．また，$\overrightarrow{OP}$ を $\vec{a}$ と $\vec{m}$ を用いて表せ．

(2) 線分OPと線分AQの交点をGとする．線分OP上の点Uは，実数sを用いて，$\overrightarrow{OU}=s\overrightarrow{OP}$ $(0\leqq s\leqq 1)$ と表され，線分AQ上の点Vは，実数tを用いて，$\overrightarrow{OV}=(1-t)\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OQ}$ $(0\leqq t\leqq 1)$ と表される．このことを利用して，$\overrightarrow{OG}$ を $\vec{a}$ と $\vec{m}$ を用いて表せ．

(3) $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて $\overrightarrow{OG}$ を表せ．

(4) $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ の中から必要なものを用いて，$\overrightarrow{OR}$ および $\overrightarrow{OS}$ をそれぞれ表せ．また，点Gが線分BRおよび線分CS上にあることを示せ．

(1) 重心の定義より．$\underline{\overrightarrow{OQ}=\frac{2}{3}\vec{m}}$ //

$\overrightarrow{AP}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AM}$ $\quad\therefore\ \overrightarrow{OP}-\vec{a}=\frac{2}{3}(\vec{m}-\vec{a})$ $\quad\therefore\ \underline{\overrightarrow{OP}=\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{2}{3}\vec{m}}$ //

(2) (1)より．

$\overrightarrow{OU}=s\overrightarrow{OP}=\frac{s}{3}\vec{a}+\frac{2}{3}s\vec{m}$ ，$\overrightarrow{OV}=(1-t)\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OQ}=(1-t)\vec{a}+\frac{2}{3}t\vec{m}$

$\vec{a}$ と $\vec{m}$ は一次独立より．$\overrightarrow{OU}=\overrightarrow{OV}$ となるとき．

$$\begin{cases}\frac{s}{3}=1-t\\ \frac{2}{3}s=\frac{2}{3}t\end{cases} \iff s=t=\frac{3}{4} \qquad \therefore\ \underline{\overrightarrow{OG}=\frac{1}{4}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{m}}\ //$$

(3) $\vec{m}=\frac{1}{2}(\vec{b}+\vec{c})$ より．$\underline{\overrightarrow{OG}=\frac{1}{4}\vec{a}+\frac{1}{4}\vec{b}+\frac{1}{4}\vec{c}}$ //

(4) 点Rは△OCAの重心より．$\underline{\overrightarrow{OR}=\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{c}}$ // 　同様に，$\underline{\overrightarrow{OS}=\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}}$ //

$\overrightarrow{BR}=\overrightarrow{OR}-\overrightarrow{OB}=\frac{1}{3}\vec{a}-\vec{b}+\frac{1}{3}\vec{c}$，$\quad\overrightarrow{BG}=\overrightarrow{OG}-\overrightarrow{OB}=\frac{1}{4}\vec{a}-\frac{3}{4}\vec{b}+\frac{1}{4}\vec{c}=\frac{3}{4}\overrightarrow{BR}$

$\therefore$ 点Gは線分BR上にある．

$\overrightarrow{CS}=\overrightarrow{OS}-\overrightarrow{OC}=\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}-\vec{c}$，$\quad\overrightarrow{CG}=\overrightarrow{OG}-\overrightarrow{OC}=\frac{1}{4}\vec{a}+\frac{1}{4}\vec{b}-\frac{3}{4}\vec{c}=\frac{3}{4}\overrightarrow{CS}$

$\therefore$ 点Gは線分CS上にある ▨