長崎大学

2011 年 第 8 問

$\boxed{8}$ 曲線 $y=\log x$ の接線は常にこの曲線の上側にあることを利用して，次の問いに答えよ．以下，k は自然数とする．

(1) 点 $\mathrm{A}_k(k,\ 0)$ を通り x 軸に垂直な直線と曲線 $y=\log x$ との交点を $\mathrm{A}_k{}'$ とし，$\mathrm{A}_k{}'$ におけるこの曲線の接線を ℓ_k とする．また，$k \geqq 2$ のとき，$\mathrm{B}_k\left(k-\dfrac{1}{2},\ 0\right)$，$\mathrm{C}_k\left(k+\dfrac{1}{2},\ 0\right)$ を通り x 軸に垂直な直線と接線 ℓ_k との交点をそれぞれ $\mathrm{B}_k{}'$，$\mathrm{C}_k{}'$ とする．四角形 $\mathrm{B}_k\mathrm{C}_k\mathrm{C}_k{}'\mathrm{B}_k{}'$ の面積を求めよ．

(2) 次の 2 つの値の大小を比較せよ．

(i) $\log k$ と $\displaystyle\int_{k-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} \log x\,dx$ （ただし，$k \geqq 2$）

(ii) $\dfrac{\log k+\log(k+1)}{2}$ と $\displaystyle\int_{k}^{k+1} \log x\,dx$ （ただし，$k \geqq 1$）

(3) $a_n=\log(n!)-\dfrac{1}{2}\log n$ とおくと，2 以上の自然数 n について，次の不等式が成り立つことを示せ．

$$\int_{\frac{3}{2}}^{n} \log x\,dx < a_n < \int_{1}^{n} \log x\,dx$$

(4) 2 以上の自然数 n について

$$\begin{cases} U_n=\left(n+\dfrac{1}{2}\right)\log n-n+\dfrac{3}{2}\left(1-\log\dfrac{3}{2}\right) \\ V_n=\left(n+\dfrac{1}{2}\right)\log n-n+1 \end{cases}$$

とおくとき，次の不等式を示せ．

$$U_n < \log(n!) < V_n$$