

2011年工学部第1問

 数理
石井K
1 実数 a に対して2次方程式

$$x^2 - 5x + 6 - a = 0$$

を考える。また、この2次方程式が整数解を持つような a を小さい順に並べたものを a_1, a_2, a_3, \dots とする。以下の問いに答えなさい。

- (1) この2次方程式が実数解を持つような a の範囲を求めなさい。
- (2) a_1 と a_2 を求めなさい。
- (3) a_n を n の式で表しなさい。
- (4) $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$ とおく。 S_n を n の式で表しなさい。

(1) 判別式を D とおくと。 $D = 25 - 4(6 - a) \geq 0 \quad \therefore a \geq -\frac{1}{4}$ //

(2) 解を α, β とおくと解と係数の関係より。

$$\alpha + \beta = 5, \quad \alpha\beta = 6 - a \quad \therefore \text{一方が整数解であれば、他方も整数解で}$$

$$a \text{ は整数となる} \quad \therefore (1) \text{ より } a \geq 0$$

$$a = 0 \text{ のとき。 } x^2 - 5x + 6 = (x-2)(x-3) = 0 \quad \therefore x = 2, 3 \text{ で条件をみたす。}$$

$$\therefore a_1 = 0 //$$

$$a = 1 \text{ のとき。 } x^2 - 5x + 5 = 0 \text{ は整数解をもたず不適}$$

$$a = 2 \text{ のとき } x^2 - 5x + 4 = (x-4)(x-1) = 0 \quad \therefore x = 1, 4 \text{ で条件をみたす。}$$

$$\therefore a_2 = 2 //$$

(3) 方程式の解は $x = \frac{5 \pm \sqrt{1+4a}}{2}$ より。これが整数となるのは。

$$1 + 4a = (2n-1)^2 \quad (n: \text{正の整数}) \text{ をみたすときなので、 } a = n^2 - n$$

$$\text{すなわち。 } a_n = n^2 - n //$$

$$(4) S_n = \sum_{k=1}^n k^2 - k = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1) - \frac{1}{2} n(n+1) = \frac{1}{3} (n-1)n(n+1) //$$