0002290819077999

愛媛大学

2016年 教育（中等教育自然科学系） 第3問

3 $f(x)=xe^{-x}$ とし，関数 $y=f(x)$ のグラフを C_1 とする．また，C_1 を x 軸方向に $\log a$ だけ平行移動したグラフを C_2 とする．ただし，a は $a>1$ を満たす実数である．

(1) 関数 $y=f(x)$ の増減，極値を調べ C_1 の概形をかけ．なお，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}xe^{-x}=0$ であることを用いてよい．

(2) C_1 と C_2 の交点の x 座標を求めよ．

(3) 原点を O とし，C_2 と x 軸の交点を A とする．$a=2$ のとき C_1，C_2 および線分 OA で囲まれた部分の面積 S を求めよ．

(1) $f'(x)=1\cdot e^{-x}+x\cdot(-e^{-x})=(1-x)e^{-x}$

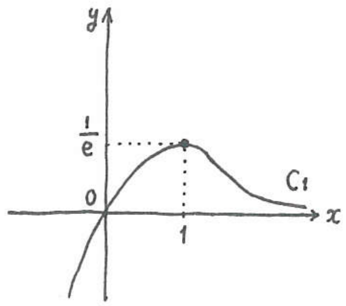
$\displaystyle\lim_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}f(x)=0$ より，

増減表は右のようになる

x	$(-\infty)$	$\cdots$	1	$\cdots$	(∞)
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$(-\infty)$	$\nearrow$	$\frac{1}{e}$	$\searrow$	(0)

極大

よって，C_1 の概形は右のようになる．



(2) C_2 : $y=(x-\log a)e^{-(x-\log a)}$

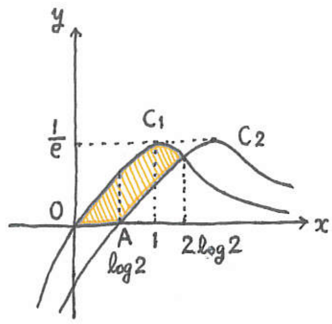
$=(x-\log a)e^{-x}\cdot e^{\log a}$

$=a(x-\log a)e^{-x}$

$\therefore$ $xe^{-x}-a(x-\log a)e^{-x}=0$ を解くと，$\{(1-a)x+a\log a\}e^{-x}=0$

$a>1$ より，$x=\underline{\dfrac{a}{a-1}\log a}$ //

(3) $S=\displaystyle\int_0^{\log 2}xe^{-x}dx+\int_{\log 2}^{2\log 2}xe^{-x}-2(x-\log 2)e^{-x}\,dx$



$=\displaystyle\int_0^{\log 2}x(-e^{-x})'dx+\int_{\log 2}^{2\log 2}x(e^{-x})'dx+2\log 2\int_{\log 2}^{2\log 2}e^{-x}dx$

$=\displaystyle\Big[-xe^{-x}\Big]_0^{\log 2}-\int_0^{\log 2}-e^{-x}dx+\Big[xe^{-x}\Big]_{\log 2}^{2\log 2}-\int_{\log 2}^{2\log 2}e^{-x}dx$
$\displaystyle+2\log 2\Big[-e^{-x}\Big]_{\log 2}^{2\log 2}$

$=-\log 2\cdot e^{-\log 2}-\Big[e^{-x}\Big]_0^{\log 2}+2\log 2\cdot e^{-2\log 2}-\log 2\cdot e^{-\log 2}+\Big[e^{-x}\Big]_{\log 2}^{2\log 2}+2\log 2\left(-e^{-2\log 2}+e^{-\log 2}\right)$

$=-\frac{1}{2}\log 2-\frac{1}{2}+1+\frac{1}{2}\log 2-\frac{1}{2}\log 2+\frac{1}{4}-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\log 2+\log 2$

$=\underline{\dfrac{1}{4}}$ //

(別) $S=\displaystyle\int_0^{2\log 2}xe^{-x}-2(x-\log 2)e^{-x}dx-\int_0^{\log 2}-2(x-\log 2)\cdot e^{-x}dx$

としても計算できる．