0001426903758999

九州歯科大学

2013年 歯学部 第2問

数理 石井K

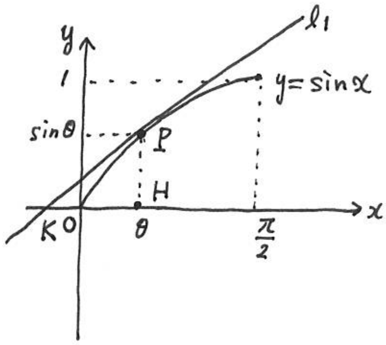
$\boxed{2}$ 曲線 $y = \sin x$ 上の点 $\mathrm{P}(\theta,\ \sin\theta)$ における曲線の接線 ℓ_1 と x 軸との交点を K とする．また，点 P から x 軸へ下した垂線 ℓ_2 と x 軸との交点を H とする．このとき，次の問いに答えよ．ただし，$0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ とする．

(1) 接線 ℓ_1 を $y = Ax + B$ とおくとき，A と B を θ を用いて表せ．

(2) $\triangle$PKH の面積 S を $\cos\theta$ を用いて表せ．

(3) $S = 1$ となる $\cos\theta$ の値を求めよ．

(4) 座標平面の原点を O とする．また，曲線 $y = \sin x$ と二つの線分 OH，PH で囲まれた図形の面積を T とする．$S : T = 3 : 2$ となる θ の値を求めよ．



(1) $y' = \cos x$ より．$\ell_1 : y = \cos\theta(x - \theta) + \sin\theta$

$\therefore \ell_1 : y = (\cos\theta)x - \theta\cos\theta + \sin\theta$

$\therefore \underline{A = \cos\theta,\ B = \sin\theta - \theta\cos\theta}$ //

(2) $\triangle$PKH：直角三角形なので　(1)より．$\mathrm{K}(\theta - \tan\theta,\ 0)$

$\therefore S = \dfrac{1}{2}\left|\theta - (\theta - \tan\theta)\right| \cdot \sin\theta = \dfrac{\sin^2\theta}{2\cos\theta} = \underline{\dfrac{1-\cos^2\theta}{2\cos\theta}}$ //

(3) (2)より．$\dfrac{1-\cos^2\theta}{2\cos\theta} = 1 \iff 1 - \cos^2\theta = 2\cos\theta$

$\iff \cos^2\theta + 2\cos\theta - 1 = 0$

$0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ より．$0 < \cos\theta < 1$　$\therefore \underline{\cos\theta = \sqrt{2} - 1}$ //

(4) $T = \displaystyle\int_0^\theta \sin x\, dx$

$= \Big[-\cos x\Big]_0^\theta$

$= -\cos\theta + 1$

$\therefore S : T = 3 : 2$ より．$3T = 2S$　$\therefore -3\cos\theta + 3 = \dfrac{1-\cos^2\theta}{\cos\theta}$

$2\cos^2\theta - 3\cos\theta + 1 = 0$

$\begin{matrix} 2 & & -1 \\ & \times & \\ 1 & & -1 \end{matrix}$

$(2\cos\theta - 1)(\cos\theta - 1) = 0$

$0 < \cos\theta < 1$ より　$\cos\theta = \dfrac{1}{2}$

$\therefore 0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ より

$\underline{\theta = \dfrac{\pi}{3}}$ //