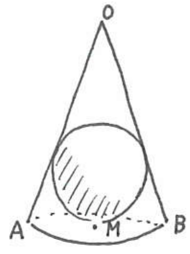
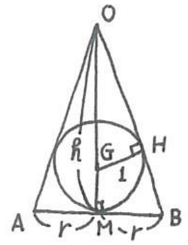
2011年 工学部 第2問

$\boxed{2}$ 半径1の球を含む円すいの体積の最小値，およびそのときの円すいの高さと底面の半径を求めなさい．





円すいの高さをh，底面の半径をrとする.

円すいの頂点と底面の円の直径を通る平面で切った断面で考える.

円すいの体積をVとすると,

$$V = \pi r^2 \cdot h \cdot \frac{1}{3} \quad \cdots ①$$

$\triangle OBM \backsim \triangle OGH$ より，$OB : BM = OG : GH$

$OB^2 = h^2 + r^2$ より，$OB = \sqrt{h^2+r^2}$

$OG = h - 1$

$\therefore \sqrt{h^2+r^2} : r = h-1 : 1$

$\therefore \sqrt{h^2+r^2} = r(h-1)$

$h > 2$ であるから，両辺2乗して，$h^2 + r^2 = r^2(h-1)^2$

$$\therefore r^2 = \frac{h}{h-2} \quad \cdots ②$$

②を①に代入して,

$$V = \pi \cdot \frac{h}{h-2} \cdot h \cdot \frac{1}{3}$$

$$= \frac{\pi}{3} \cdot \frac{h^2}{h-2}$$

$$= \frac{\pi}{3} \cdot \left(h + 2 + \frac{4}{h-2}\right)$$

$$= \frac{\pi}{3} \cdot \left\{(h-2) + \frac{4}{h-2}\right\} + \frac{4}{3}\pi$$

$h-2>0$ で，相加・相乗平均の関係より，$h - 2 + \frac{4}{h-2} \geqq 2\sqrt{(h-2)\cdot\frac{4}{h-2}} = 4$ （等号成立は $h=4$ のとき）

$\therefore V \geqq \frac{\pi}{3} \cdot 4 + \frac{4}{3}\pi = \frac{8}{3}\pi$ （等号成立は $h=4$ のとき） このとき②より $r = \sqrt{2}$

$\therefore$ 体積の最小値 $\frac{8}{3}\pi$，そのときの円すいの高さは4，底面の半径は$\sqrt{2}$ //