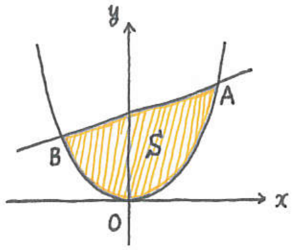
2016年 工学部 第1問

$\boxed{1}$ 放物線 $y=x^2$ 上に2点 $A(a,\ a^2)$, $B(b,\ b^2)$ がある．ただし，$a>b$ とする．直線ABと放物線とで囲まれる部分の面積を S とする．下の問いに答えなさい．

(1) $a=b+1$ とするとき，S を求めなさい．

(2) 2点A，Bが $S=\dfrac{1}{6}$ という条件を満たしながら動くとき，線分ABの中点の軌跡を求めなさい．

(1) $S=\int_b^a \dfrac{a^2-b^2}{a-b}(x-a)+a^2-x^2\,dx$



$= -\int_b^a (x-a)(x-b)\,dx$

$\big\downarrow$ $\frac{1}{6}$公式

$= \dfrac{1}{6}(a-b)^3$

$\big\downarrow$ $a-b=1$ より

$= \underline{\dfrac{1}{6}}$ 〃

(2) $S=\dfrac{1}{6} \iff \dfrac{1}{6}(a-b)^3=\dfrac{1}{6}$

$\iff a-b=1$

線分ABの中点を $M(X,Y)$ とおくと．

$$\begin{cases} X=\dfrac{a+b}{2} \\ Y=\dfrac{a^2+b^2}{2} \end{cases} \iff \begin{cases} X=\dfrac{2a-1}{2} \\ Y=\dfrac{a^2+(a-1)^2}{2} \end{cases} \iff \begin{cases} X=a-\dfrac{1}{2} \cdots ① \\ Y=a^2-a+\dfrac{1}{2} \cdots ② \end{cases}$$

①より． $a=X+\dfrac{1}{2}$ 　これを②に代入して．

$Y=\left(X+\dfrac{1}{2}\right)^2-\left(X+\dfrac{1}{2}\right)+\dfrac{1}{2}$

$=X^2+\dfrac{1}{4}$

∴ 線分ABの中点の軌跡は $\underline{\text{放物線 } y=x^2+\dfrac{1}{4}}$ 〃