2012 年 商学部 第 2 問

$\boxed{2}$ O を原点とする座標空間において，4 点

$$A_1(1,\ 1,\ 1),\quad B_1(-1,\ -1,\ 1),\quad C_1(1,\ -1,\ -1),\quad D_1(-1,\ 1,\ -1)$$

を考えると，立体 $A_1B_1C_1D_1$ は正四面体である．このとき，以下の設問に答えよ．

(1) 正四面体 $A_1B_1C_1D_1$ を xy 平面に平行な平面 $z=-1+h$ $(0 \leqq h \leqq 2)$ で切ったときに出来る図形の面積を $S(h)$ とすると，

$$S(h) = -\boxed{34}\,h^2 + \boxed{35}\,h$$

と表され，$S(h)$ は $h = \boxed{36}$ のとき最大値 $\boxed{37}$ をとる.（このときの図形はペトリー多角形と呼ばれている.）さらに，

$$V_1 = \int_0^2 S(h)\,dh = \frac{\boxed{38}}{\boxed{39}}$$

とおくと，V_1 は正四面体 $A_1B_1C_1D_1$ の体積となっている．

(2) 三角形 $B_1C_1D_1$，三角形 $C_1D_1A_1$，三角形 $D_1A_1B_1$，三角形 $A_1B_1C_1$ の重心をそれぞれ A_2，B_2，C_2，D_2 とする．このとき，立体 $A_2B_2C_2D_2$ は再び，正四面体となる.（このことを，正四面体は自己双対であるという.）同様に，n を自然数として，三角形 $B_nC_nD_n$，三角形 $C_nD_nA_n$，三角形 $D_nA_nB_n$，三角形 $A_nB_nC_n$ の重心をそれぞれ A_{n+1}，B_{n+1}，C_{n+1}，D_{n+1} とする．このとき，

$$\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + \cdots + \overrightarrow{OA_n} = \frac{\boxed{40}}{\boxed{41}}\left\{1 - \left(-\frac{\boxed{42}}{\boxed{43}}\right)^n\right\}\overrightarrow{OA_1}$$

である．また，正四面体 $A_nB_nC_nD_n$ の表面積 S_n と体積 V_n は，それぞれ，

$$S_n = \boxed{44}\cdot\boxed{45}^{-\boxed{46}\,n+\frac{\boxed{47}}{2}},\quad V_n = \boxed{48}\cdot\boxed{49}^{-\boxed{50}\,n+\boxed{51}}$$

である．