0001853546418999

室蘭工業大学

2014年 工学部 第3問

数理 石井K

$\boxed{3}$ 数列 $\{a_n\}$ は

$$a_1=0,\quad a_2=4,\quad a_{n+2}=5a_{n+1}-6a_n+3^n\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

を満たすとする．さらに，$b_n=a_{n+1}-3a_n$ とおく．

(1) $c_n=b_n-3^n$ とおくとき，c_{n+1} を c_n を用いて表せ．また，数列 $\{c_n\}$ および数列 $\{b_n\}$ の一般項を求めよ．

(2) $d_n=\dfrac{a_n}{3^{n-1}}$ とおくとき，d_{n+1} を d_n を用いて表せ．また，数列 $\{d_n\}$ および数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ．

(1) $b_{n+1}=2b_n+3^n$

$\therefore b_{n+1}-3^{n+1}=2(b_n-3^n)$

$\therefore \underline{c_{n+1}=2c_n}$ //

これより数列 $\{c_n\}$ は初項 $c_1=b_1-3=a_2-3a_1-3=1$，公比2の等比数列

$\therefore \underline{c_n=2^{n-1}}$ //　　$\therefore b_n-3^n=2^{n-1}$　　$\therefore \underline{b_n=3^n+2^{n-1}}$ //

(2) $a_{n+2}=5a_{n+1}-6a_n+3^n$ の両辺を 3^n で割って

$$3\cdot\frac{a_{n+2}}{3^{n+1}}=5\cdot\frac{a_{n+1}}{3^n}-2\cdot\frac{a_n}{3^{n-1}}+1$$

$\therefore 3d_{n+2}=5d_{n+1}-2d_n+1$

ここで $e_n=d_{n+1}-d_n$ とおくと．

$3e_{n+1}=2e_n+1$

$\therefore 3(e_{n+1}-1)=2(e_n-1)$

$\therefore$ 数列 $\{e_n-1\}$ は初項 $e_1-1=d_2-d_1-1=\dfrac{a_2}{3}-a_1-1=\dfrac{1}{3}$，

公比 $\dfrac{2}{3}$ の等比数列

$\therefore e_n-1=\dfrac{1}{3}\cdot\left(\dfrac{2}{3}\right)^{n-1}$

$\therefore e_n=\dfrac{1}{3}\cdot\left(\dfrac{2}{3}\right)^{n-1}+1$

$\therefore \underline{d_{n+1}=d_n+\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{2}{3}\right)^n+1}$ //

$n\geqq 2$ のとき

$$d_n=d_1+\sum_{k=1}^{n-1}\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^k+1\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{\frac{2}{3}\left(1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\right)}{1-\frac{2}{3}}+n-1$$

$$=\underline{n-\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}}\ //$$

これは $n=1$ のときも含む

$\therefore a_n=3^{n-1}\cdot\left\{n-\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\right\}$

$=\underline{n\cdot 3^{n-1}-2^{n-1}}$ //