中央大学

2012年 理工（一般） 第3問

$\boxed{3}$ 座標平面において，原点 O(0, 0) を中心とする半径 1 の円を C_0 とし，点 A$\left(\frac{1}{2},\ 0\right)$ を中心とする半径が $\frac{1}{2}$ の円を C_1 とする．以下の問いに答えよ．

(1) 円 C_0 と内接し，円 C_1 と外接する円 D の半径を r，中心 G の座標を $(\alpha,\ \beta)$ とするとき，r を α によって表せ．

(2) 中心 G$(\alpha,\ \beta)$ の軌跡の方程式を求めよ．

以上で考察した円 D は無数にあるが，これらの円はどれも点 B$\left(\frac{1}{3},\ 0\right)$ を中心とする半径 $\frac{2}{3}$ の円 C_2 と特別な位置関係にある．以下ではこのことを調べてみよう．円 D と円 C_2 の 2 つの交点を P，Q とする．

(3) 直線 PQ の方程式を α，β により表せ．

(4) 点 P の座標 $(X,\ Y)$ が直線 PQ の方程式と円 C_2 の方程式を満たしていることを利用して，$\overrightarrow{\mathrm{BP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{GP}}=0$ を示せ．