2014年 工学部 第5問

数理 石井K

$\boxed{5}$ 行列 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ の表す1次変換 f は，原点 $(0,\ 0)$ 以外のある点を原点に移す．

(1) $ad-bc$ の値を求めよ．

(2) $a+d=1$ のとき，$A^{2014}-A$ を求めよ．

(1) f により原点に移される点を (x,y) $(x^2+y^2 \neq 0)$ とおくと．

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \therefore \begin{cases} ax+by=0 & \cdots ① \\ cx+dy=0 & \cdots ② \end{cases}$$

(i) $x \neq 0$ のとき

①$\times d$ − ②$\times b$ より． $(ad-bc)x=0$ $\quad\therefore ad-bc=0$

(ii) $y \neq 0$ のとき

①$\times c$ − ②$\times a$ より， $(bc-ad)y=0$ $\quad\therefore ad-bc=0$

いずれの場合も $\underline{ad-bc=0}$ //

(2) (1)とケーリー・ハミルトンの定理より．

$A^2-A=O$ が成り立つ．両辺に A^{2012} をかけて

$\therefore A^{2014}=A^{2013}$

以下同様に

$A^{2013}=A^{2012}=\cdots\cdots=A$

$\therefore A^{2014}-A=A-A=\underline{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}$ //