0001335544668999

室蘭工業大学

2013年 工学部 第4問

数理 石井K

$\boxed{4}$ 平面上の4点O，A，B，Pは互いに異なる点とする．三角形OABにおいて

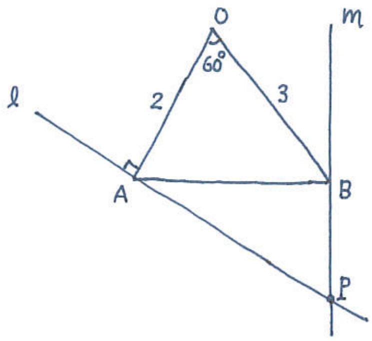
$|\overrightarrow{OA}| = 2, \quad |\overrightarrow{OB}| = 3$

かつ$\overrightarrow{OA}$と$\overrightarrow{OB}$のなす角が60°とする．ℓは点Aを通り$\overrightarrow{OA}$が法線ベクトルである直線，mは点Bを通り$\overrightarrow{AB}$が法線ベクトルである直線とする．また，ℓとmは点Pで交わるとする．

(1) $\overrightarrow{OA} \perp \overrightarrow{AP}$であることを用いて，内積$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OP}$を求めよ．

(2) 内積$\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OP}$を求めよ．

(3) $\overrightarrow{OP} = s\overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{OB}$を満たす実数$s$，$t$の値を求めよ．



(1) $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{AP} = \overrightarrow{OA} \cdot (\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OA})$

$= \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OP} - |\overrightarrow{OA}|^2$

$= \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OP} - 4$

一方，$\overrightarrow{OA} \perp \overrightarrow{AP}$ より，$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{AP} = 0$ $\quad \therefore \underline{\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OP} = 4}$ //

(2) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BP} = (\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}) \cdot (\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OB})$

$= \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OP} - |\overrightarrow{OB}|^2 - \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}$

$= \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OP} - 9 - 4 + 3$ $\quad (\because \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = |\overrightarrow{OA}| \cdot |\overrightarrow{OB}| \cdot \cos 60° = 3)$

$= \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OP} - 10$

ここで，$\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{BP}$ より，$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BP} = 0$ なので，$\underline{\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OP} = 10}$ //

(3) $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} \cdot (s\overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{OB})$

$= s|\overrightarrow{OA}|^2 + t\,\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}$

$= 4s + 3t$

$\therefore$ (1)の結果より．$4s + 3t = 4$ …①

同様に，$\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OP} = s\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} + t|\overrightarrow{OB}|^2 = 3s + 9t = 10$ …② $(\because$ (2)の結果より$)$

$\therefore$ ①，②より，$\underline{s = \frac{2}{9},\ t = \frac{28}{27}}$ //