0002242367577999

自治医科大学

2016年 医学部 第3問

数理 石井K

$\boxed{3}$ 実数m, nは, $m+n=17$を満たす. 2^m+4^nを最小にするm, nの値をそれぞれa, bとするとき, $\left|\dfrac{96a}{35b}\right|$の値を求めよ.

$n=17-m$ より,

$$2^m+4^n = 2^m+4^{17-m}$$
$$= 2^m+2^{34-2m}$$
$$= 2^{m-1}+2^{m-1}+2^{34-2m}$$
$$\geqq 3\sqrt[3]{2^{m-1}\cdot 2^{m-1}\cdot 2^{34-2m}}$$
$$= 3\sqrt[3]{2^{32}}$$

ポイント
3つの場合の相加・相乗平均の関係
$a, b, c>0$ のとき. $a+b+c \geqq 3\sqrt[3]{abc}$
(等号成立は $a=b=c$ のとき)

等号成立は. $m-1=34-2m \iff m=\dfrac{35}{3}$, $n=\dfrac{16}{3}$

$$\therefore \left|\frac{96a}{35b}\right| = \left|96\cdot\frac{35}{3}\cdot\frac{1}{35}\cdot\frac{3}{16}\right|$$
$$= \underline{6}$$

(別) $t=2^m$ とおくと, $2^m+4^n = t+\dfrac{2^{34}}{t^2}$

これを $f(t)$ とおいて 微分しても 求められる.

(研究) $x>0$ とする.

$2x+\dfrac{1}{x^2}$ ← 2つの場合の相加・相乗は使えない ($\sqrt{\ }$ の中に x が残る)

↓ こうすると…

$x+x+\dfrac{1}{x^2}$ ← 3つの場合の相加・相乗が使える!

$$x+x+\frac{1}{x^2} \geqq 3\sqrt[3]{x\cdot x\cdot\frac{1}{x^2}}$$
$$= 3$$

等号成立は. $x=x=\dfrac{1}{x^2} \iff x^3=1$
$\iff x=1$