0001863456318999

宮崎大学

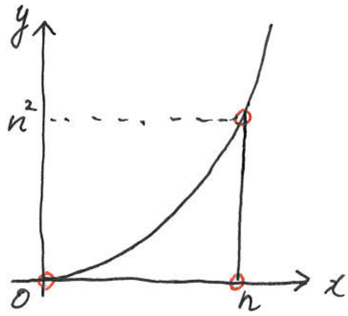
2014年第5問

$\boxed{5}$ 座標平面において，x 座標と y 座標がともに整数である点を格子点という．n を自然数とし，放物線 $y=x^2$，直線 $x=n$ および x 軸で囲まれた図形を S_n とする．S_n の境界上にある格子点の個数を a_n とし，S_n の境界を除いた内部にある格子点の個数を b_n とするとき，次の各問に答えよ．

(1) a_n を，n を用いて表せ．

(2) b_n を，n を用いて表せ．

(3) S_n の面積を c_n とするとき，極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{a_n}{2}+b_n-c_n\right)$ を求めよ．



放物線上では、

(1) x座標が整数 ⇒ y座標も整数

$\therefore\ a_n=(n+1)\times 2+(n^2+1)-3$

∘は重複して数えたのであとから引いている

$\therefore\ a_n=n^2+2n$ //

(2) S_n の内部で $x=k\ (1\leqq k<n)$ をみたす格子点の数は、

$(k,1),(k,2),\cdots,(k,k^2-1)$ の k^2-1 コなので

$$b_n=\sum_{k=1}^{n-1}k^2-1$$

$$=\frac{1}{6}(n-1)n(2n-1)-(n-1)$$

$$=\frac{1}{6}(n-1)(n-2)(2n+3)$$ //

(3) $c_n=\displaystyle\int_0^n x^2\,dx=\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^n=\frac{n^3}{3}$

$$\therefore\ \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{a_n}{2}+b_n-c_n\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{n^2+2n}{2}+\frac{1}{6}(n-1)(n-2)(2n+3)-\frac{n^3}{3}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n+6}{6n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{6}{n}}{6}$$

$$=\frac{1}{6}$$ //