名古屋市立大学

2015年 医学部 第4問

$\boxed{4}$ 空間内の点 O，A_1，A_2，B，C を考える．このとき，ベクトル $\overrightarrow{OA_1}$，$\overrightarrow{OA_2}$ はともに長さが 1 で，角度 θ $\left(0 < \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$ をなす．また点 B は O，A_1，A_2 を含む平面 H 上に存在せず，ベクトル $\overrightarrow{OB}$ は，$\overrightarrow{OA_1}\cdot\overrightarrow{OB} = c_1$，$\overrightarrow{OA_2}\cdot\overrightarrow{OB} = c_2$ を満たす（ただし c_1，c_2 はいずれも 0 でない実数であるとする）．さらにベクトル $\overrightarrow{OC}$ は，$\overrightarrow{OC} = c_1\overrightarrow{OA_1} + c_2\overrightarrow{OA_2}$ のように表され，かつベクトル $\overrightarrow{CB}$ と垂直である．このとき，次の問いに答えよ．

(1) 角度 θ を求めよ．

(2) $|\overrightarrow{OB}|^2 > {c_1}^2 + {c_2}^2$ が成り立つことを示せ．ただし，$|\overrightarrow{OB}|$ はベクトル $\overrightarrow{OB}$ の長さを表す．

(3) $c_1 = c_2 = c$，$|\overrightarrow{OB}| = b$ とする．また，$\overrightarrow{OD_1} = c\overrightarrow{OA_1}$，$\overrightarrow{OD_2} = c\overrightarrow{OA_2}$ となるように，空間上に点 D_1，D_2 を与える．四面体 D_1D_2CB の体積を，b，c を用いて表せ．

(4) (3) の条件の下で 3 点 D_1，D_2，B により定まる平面に対し，点 C から垂線を引いたとき，垂線と平面の交点を T とする．このとき，CT の長さを b，c で表せ．