2015年 教育学部（中等理科） 第3問

$\boxed{3}$ 関数 $f(x)$ が

$$f(x)=3x^2-\int_0^1|f(t)|\,dt$$

をみたすとき，次の問に答えよ．

(1) 方程式 $4x^3-6x^2+1=0$ を $x=\dfrac{1}{u}$ とおくことにより解け．

(2) $\displaystyle\int_0^1|f(t)|\,dt=3a^2$ とおくとき，a の値を求めよ．ただし，$a\geqq 0$ とする．

(1) $4\cdot\left(\frac{1}{u}\right)^3-6\cdot\left(\frac{1}{u}\right)^2+1=0$

両辺に u^3 をかけて，$u^3-6u+4=0$

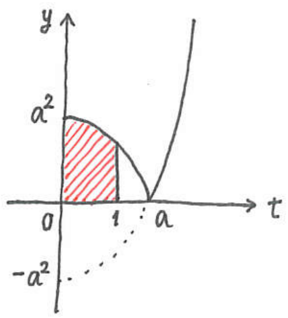
$\therefore\ (u-2)(u^2+2u-2)=0$　　$\therefore\ u=2,\ -1\pm\sqrt{3}$

$\therefore\ x=\frac{1}{u}$ より，$\underline{x=\frac{1}{2},\ \frac{1\pm\sqrt{3}}{2}}$ //

(2) $f(x)=3x^2-3a^2$ と表せるから

$3a^2=\int_0^1|3t^2-3a^2|\,dt$

$=3\int_0^1|t^2-a^2|\,dt$　$\cdots$①



(i) $a>1$ のとき

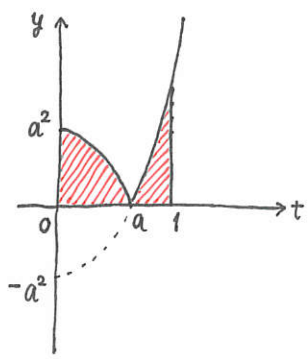
右図と①より，

$3a^2=3\int_0^1 -t^2+a^2\,dt$

$=3\left[-\frac{t^3}{3}+a^2t\right]_0^1$

$=3a^2-1$

$\therefore\ 0=-1$ となり不適．



(ii) $0\leqq a\leqq 1$ のとき

同様に，$3a^2=3\int_0^a -t^2+a^2\,dt+3\int_a^1 t^2-a^2\,dt$

$=3\left[-\frac{t^3}{3}+a^2t\right]_0^a+3\left[\frac{t^3}{3}-a^2t\right]_a^1$

$=2a^3+1-3a^2+2a^3$

$\therefore\ 4a^3-6a^2+1=0$　　(1) と $0\leqq a\leqq 1$ より，$a=\frac{1}{2}$

(i)，(ii) より，$\underline{a=\frac{1}{2}}$ //