

2015年 現代教養 第7問

 数理
石井K

 7 複素数 α が $\alpha^3 = 1$ かつ $\alpha \neq 1$ をみたすとき、以下の設問に答えよ。

- (1) $\alpha^2 + \alpha + 1 = 0$ を示せ。
 (2) $(\alpha + 1)^{2015}$ の値を求めよ。

$$(1) \alpha^3 - 1 = 0 \text{ より}$$

$$(\alpha - 1)(\alpha^2 + \alpha + 1) = 0$$

$$\alpha \neq 1 \text{ であるから, } \alpha^2 + \alpha + 1 = 0 \quad \square$$

$$(2) (1) \text{ より, } \alpha + 1 = -\alpha^2$$

$$\begin{aligned} \therefore (\alpha + 1)^{2015} &= (-\alpha^2)^{2015} \\ &= -\alpha^{4030} \\ &= -(\alpha^3)^{1343} \cdot \alpha \\ &= -\alpha \quad (\because \alpha^3 = 1 \text{ より}) \end{aligned}$$

ここで、 α は方程式 $x^2 + x + 1 = 0$ の解より、

$$\alpha = \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}$$

$$\therefore (\alpha + 1)^{2015} = \frac{1 \pm \sqrt{3}i}{2}$$