0002076903297999

高知大学

2015年第2問

数理 石井K

$\boxed{2}$ 関数 $f(x)=nx^2-2(a_1+a_2+\cdots+a_n)x+(a_1{}^2+a_2{}^2+\cdots+a_n{}^2)$ を考える．ただし，n は正の整数で，a_1，a_2，$\cdots$，a_n は実数である．次の問いに答えよ．

(1) $n=1$ および $n=2$ のとき，常に $f(x)\geqq 0$ であることを示せ．

(2) すべての n に対し，常に $f(x)\geqq 0$ であることを示せ．

(3) $(a_1+a_2+\cdots+a_n)^2\leqq n(a_1{}^2+a_2{}^2+\cdots+a_n{}^2)$ であることを示せ．

(4) $(a_1+a_2+\cdots+a_n)^2=n(a_1{}^2+a_2{}^2+\cdots+a_n{}^2)$ であれば，a_1，a_2，$\cdots$，a_n はすべて等しいことを示せ．

(1) $n=1$ のとき．$f(x)=x^2-2a_1x+a_1^2=(x-a_1)^2\geqq 0$

$n=2$ のとき．$f(x)=2x^2-2(a_1+a_2)x+a_1^2+a_2^2$ 　$f(x)=0$ の判別式を D_2 とおくと．

$$\frac{D_2}{4}=(a_1+a_2)^2-2(a_1^2+a_2^2)$$
$$=-(a_1-a_2)^2$$
$$\leqq 0$$

$\therefore f(x)\geqq 0$ が成り立つ ▨

(2) $f_k(x)=x^2-2a_kx+a_k^2$ とおく $(k=1,2,\cdots,n)$

このとき．$f_k(x)=(x-a_k)^2\geqq 0$ が成り立つので，$k=1,2,\cdots,n$ のとき．すべてを足し合わせたものを考えると．

$$f(x)=\sum_{k=1}^{n}f_k(x)=\sum_{k=1}^{n}(x-a_k)^2\geqq 0$$ ▨

(3) (2)より．$f(x)=0$ の判別式 D_n は $D_n\leqq 0$ となる．

$$\therefore \frac{D_n}{4}=(a_1+a_2+\cdots+a_n)^2-n(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2)\leqq 0$$

$$\therefore (a_1+a_2+\cdots+a_n)^2\leqq n(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2)$$ ▨

(4) (3)より．等号成立 $\iff D_n=0$

$\iff f(x)=0$ となる x が（ただ1つ）存在する．

$\iff f(x)=\sum_{k=1}^{n}(x-a_k)^2=0$ となる x が（ただ1つ）存在する

$\iff a_1=a_2=\cdots=a_n$ ▨